మోనోగ్రాఫ్—26

సాంఖ్యకశాస్త్రము

# యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియలు


రచయిత

శ్రీ వై. యస్. రామకృష్ణయ్య, ఎమ్. ఏ.,

సాంఖ్యక శాస్త్రాధ్యాపకులు,

ఉస్మానియా విశ్వవిద్యాలయము, హైదరాబాదు.

సంపాదకురాలు

డాక్టరు (శ్రీమతి) వి. సుభద్రాదేవి, ఎమ్. ఏ., బి. ఇడి., పిహెచ్. డి.,

సాంఖ్యకశాస్త్ర శాఖాధ్యక్షురాలు,

ఉస్మానియా విశ్వవిద్యాలయము, హైదరాబాద్.



తెలుగు అకాడమి

హైదరాబాదు

1977

Monograph : yaadruchika prakriyalu (Stochastic Processes) ;
*Author*: Sri Y. S. Ramakrishnaiah; *Editor* : Dr. (Smt.) V. Subhadra
Devi pp. vi + 166.

© TELUGU AKADEMI
HYDERABAD

*First Published*, 1977
Copies : 1000

Published by T E L U G U A K A D E M I, Hyderabad - 500 029 (Andhra Pradesh) under the Centrally Sponsored Scheme for Production of Books and Literature in Regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

*All rights whatsoever in this book are strictly reserved and no portion of it may be reproduced by any process for any purpose without the written permission of the Copyright owners.*

*Price : Rs.* 7-50

PRINTED IN INDIA
Text at Karunasri Printers, Mahakali Street, Secunderabad - 500003
Cover at the A. P. Govt. Text-Book Press, Hyderabad-500004
Andhra Pradesh.

# ప్రవేశిక

నిత్యజీవితంలో మనం పరిశీలించవలసిన అనేక పరిస్థితులు సంభావ్యతా నిబంధనలకు అనుగుణంగానే మార్పు చెందుతూ ఉంటాయి, ఇవి చాలవరకు కాలగమనం మీద కూడా ఆధారపడి ఉంటాయి. అందుచేత కాలాన్ని అనుసరిస్తూ సంభావ్యతా నిబంధనలకు కట్టుబడి ఉండే పరిస్థితులనూ, వానికి దోహదం చేసే కారణాలనూ వివరంగా పరిశీలించవలసి ఉంటుంది. ఇటువంటి వానికి రూపకల్పన చేసే ఉజ్జాయింపు నమూనాలే యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియలు అవుతాయి. ఆధునిక యుగంలో ఈ యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియల ప్రాముఖ్యతను గుర్తించి భౌతిక, రసాయినిక, జీవ, వైద్య, ఇంజనీరింగ్, మొదలయిన శాస్త్రీయ విభాగాలలో యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియల నమూనాలను విరివిగా అనువర్తించడం జరుగుతూ ఉంది.

ఈ పుస్తకంలో యాదృచ్ఛిక ప్రకియల ప్రాధమిక అంశాలను గురించి గణితశాస్త్ర పరంగా విశ్లేషించడం జరిగింది. స్థలాభావంవల్ల యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియలను పరిపూర్ణంగా చర్చించడం సాధ్యం కాలేదు. వీనిని వివరించడంలో సాధ్యమైనంతవరకు సులభ పద్ధతులనే ఉపయోగించబడినాయి. ఆయా విషయాలపై పరిపూర్ణంగా తెలుసుకోగోరు ఉత్సాహవంతులైన పాఠకులు పుస్తకం చివరి bibliography లో పేర్కొన్న గ్రంథాలను సంప్రదించండి.

ఈ గ్రంథంలో గమనించిన దోషాలను, నిర్మాణాత్మకమైన విమర్శలను సహృదయ పాఠకులు, అధ్యాపకులు, విద్యార్థులు మా దృష్టికి తెస్తే, పునర్ముద్రణలో సరిచేసుకోగలము.

# ప్రస్తావన

తెలుగు అకాడమి ఇంతవరకు ఇంటర్మీడియట్ స్థాయిలో పాఠ్య గ్రంథాలను, డిగ్రీస్థాయిలో పఠనీయగ్రంథాలను 300 కు పైగా ప్రచురించింది. శాస్త్రగ్రంథప్రచురణలో ఇది మొదటిదశ. రెండోదశలో కొన్ని ప్రమాణిక గ్రంథాలకు అనువాదాలను. ఆయా శాస్త్రాలమీద వాటి వాటి ప్రాముఖ్యాన్ని పురస్కరించుకొని, మోనోగ్రాఫ్‌లను ప్రచురించదలచింది.

ఇందువల్ల విద్యార్థులకూ, ఉపాధ్యాయులకూ పాఠ్యగ్రంథాలేకాక ఆయా పాఠ్యాంశాల మీద విస్తృతాధ్యయనానికి సహాయపడే విషయ ప్రధాన రచనలుకూడా లభిస్తాయి. అంతేకాదు ఉన్నత విద్యాబోధనభాషగా తెలుగు సుప్రతిష్ఠితమై తెలుగు అకాడమి పాత్ర మరింత సుసంపన్నం కాగలదు.

విశ్వవిద్యాలయ స్థాయిలో శాస్త్రగ్రంథప్రచురణ చేపట్టిన ఈ రెండో దశలో "మోనోగ్రాఫ్" అనే పేరిట ప్రచురితమవుతున్న గ్రంథాలలో ఇది ఒకటి.

గుణగ్రహణ పారీణులైన పాఠకులు ఈ గ్రంథాన్ని అభిమానించి ఆదరిస్తారని ఆశిస్తున్నాము. సహృదయవిమర్శకులు ఇచ్చే సూచనలను పునర్ముద్రణలో తప్పక పరిశీలించ గలము.

# విషయసూచిక


**1. యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ నిర్వచనము, భావన** **1-17**

1.1 యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ-దాని నిర్వచనము, 1

1.1.1. స్థితి ఆవరణ; 1.1.2. సూచిక సమితి; 1.1.3 సంభావ్యతా విభాజనము;

1.2 యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియలు - వాటి వర్గీకరణము 4

1.2.1. స్వతంత్ర పెరుగుదలలు గల ప్రక్రియలు; 1.2.2. మార్కోవ్ ప్రక్రియలు; 1.2.3, మార్టింగేల్సు; 1.2.4. స్థావర ప్రక్రియలు;

1.3. కొన్ని సామాన్య యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియలు 10

1.3.1. బెర్నోలీ ప్రక్రియ; 1.3.2 పాయిజాన్ ప్రక్రియ; 1.3.3 ద్విమూల్య ప్రక్రియలు; 1.3.4 గ్యాసియన్ లేదా సామాన్య ప్రక్రియ; 1.3.5 వీనర్ ప్రక్రియ;

**2. మార్కోవ్ శృంఖలాలు** **18-77**

2.1. మార్కోవ్ ప్రక్రియ - దానినిర్వచనము 18

2.2. మార్కోవ్ ప్రక్రియలు - వాటివర్గీకరణము 19

2.3. సంక్రమ సంభావ్యతా ప్రమేయాలు 19

2.4 మార్కోవ్ శృంఖలం యొక్క సంభావ్యతా విభాజనాన్ని వర్ణించడం. 21

2.5 మార్కోవ్ శృంఖలాలకు కొన్ని ఉదాహరణలు 28

2.5.1 స్వతంత్ర సమ విభాజనంగల యాదృచ్ఛిక చలరాశుల సంకలనము; 2.5.2 సరళరేఖ మీద యాదృచ్ఛిక నడక; 2.5.3 విచ్ఛిన్న క్యూ నమూనా 2.5.4 విచ్ఛిన్న బ్రాంచింగ్ ప్రక్రియ;

2.6. స్థితుల వర్గీకరణము 40

2.7. పునరావృత స్థితులు 46

2.8. పునరావర్తకాల విభాజనము 53

2.9 అవధి సంక్రమ సంభావ్యతలు 55

2.10 పరిమిత, అనంత మార్కోవ్ శృంఖలాలు; 2.10.1 పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలాలు; 2.10.2 ఎర్గాడిక్ స్థితులతో విడదీయలేమి, పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలాలు; 2.10.3 అనంత మార్కోవ్ శృంఖలాలు;

3 సామాన్య మార్కోవ్ ప్రక్రియలు 78-149

3.1 ఉపోద్ఘాతము 78

3.2 మార్కోవ్ ప్రక్రియల కొన్ని సాధారణ ధర్మాలు 81

3.2.1 అవధి విభాజనాలు;

3.3. పాయిజాన్ ప్రక్రియ 85

3.3.1 పాయిజాన్ స్వీకృతాలు; 3.3.2 అంతర్సంభవ వ్యవధుల విభాజనము; 3.3.3 నిరీక్షించు కాల విభాజనము; 3.3.4 ఏకరూప విభాజనము; 3.3 5 పాయిజాన్ ప్రక్రియల లక్షణాలు; 3.3.6 పాయిజాన్ ప్రక్రియకు సాధారణీకరణము;

3.4. శుద్ధ జనన ప్రక్రియ 104

3.4.1 ఫ్యూరీ - యూల్ ప్రక్రియ

3.5 శుద్ధ మరణ ప్రక్రియ 109

3.6. జనన, మరణ ప్రక్రియ 111

3.6.1 నిరీక్షణా కాల విభాజనము;

3.7 జనన, మరణ ప్రక్రియకు ఉదాహరణలు 119

3.7.1 'వలస'తో ఏకఘాత వృద్ధి; 3.7.2 క్యూ నమూనా;

3.8 పోల్యా ప్రక్రియ 133

3.9 పునః ప్రారంభ ప్రక్రియ 137

3.9.1 $N_t$ యొక్క విభాజనము; 3.9.2 అవధి సిద్ధాంతాలు; 3.9.3 పునః ప్రతి ఫలాల ప్రక్రియ;

4 వ్యాప్తి ప్రక్రియ 150-165

4.1 ఉపోద్ఘాతము 150

4.2 కోల్మోగ్రోవ్ సమీకరణాలు 153

4.3 యాదృచ్ఛిక నడకకు వ్యాప్తిఅవధి. 157

4.4 వీనర్ ప్రక్రియ 160

Bibliography 167

# యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ నిర్వచనము, భావన

## DEFINITION, NOTION OF STOCHASTIC PROCESS

### 1.1 యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ - దాని నిర్వచనము

కాలానుగుణంగా మారుతూ, సంభావ్యతా నిబంధనలకు కట్టుబడి ఉండే ఏ ప్రక్రియ నైనా యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ (random process Or Stochastic Process) గా పరిగణిస్తారు. ఏ సంభావ్యతా ప్రక్రియనైనా యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియగా నిర్వచించడం పరిపాటి. ఏ ప్రక్రియ అయినా పురోగమిస్తోంటే, దానిపై జరిపే సంఖ్యాత్మక పరిశీలన ఆ ప్రక్రియయొక్క విస్తరణను తెలుపుతుంది. యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియను గణితీయ సంకేతంలో కింది విధంగా వర్ణించవచ్చు. ప్రారంభం నుంచి $t$ వరకు జరిగిన సమయము, $(0, t)$ లో ఏదైనా యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియపై జరిపిన పరిశీలనా ఫలితంగా వచ్చిన ప్రేక్షితపు విలువను $X_t$ తో సూచిస్తే, కాలగమనంలో $t$ లో మార్పువల్ల $X_t$ ల సమూహం ఏర్పడుతుంది. $t$ ల సంభవ విలువల సముదాయాన్ని $T$ తో సూచిస్తే, $\{X_t, t \in T\}$ అనే యాదృచ్ఛిక చలరాశుల సమూహమేర్పడుతుంది. ఇటువంటి ఏ యాదృచ్ఛిక చలరాశుల సమూహాన్ని అయినా యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియగా నిర్వచిస్తారు.

పై విధంగా కాక యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియను మరోలా కూడా నిర్వచించవచ్చు. యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియను యాదృచ్ఛిక ప్రమేయాల సమూహము $\{X_t(\omega), t \in T, \omega \in S\}$ గా కూడా నిర్వచిస్తారు. ఈ సంకేతంలో, $t$ స్థిరమైనప్పుడు, $X_t(\cdot)$ లఘుఘటన $\omega$ లలో శాంపుల్ ఆవరణము $S$ పై నిర్వచింపబడిన యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియను సూచిస్తుంది. కాబట్టి ఇక్కడ $X_t(\cdot)$ యాదృచ్ఛిక చలరాశి అవుతుంది. కాని ఒక స్థిర లఘు ఘటన $\omega$, $(\omega \in S)$, కు చెందిన $X_t(\omega) = X_t$ ని $t$ లో ప్రమేయంగా భావిస్తే, దీనిని యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ, $X_t(\omega)$, యొక్క ప్రతిరూప ప్రమేయము (sampling function) లేదా సంభవ విలువ (realization) అని అంటాము. ఒక పాచిక (die) ని దొర్లించడంలో $n$ వ ప్రయత్నపు ఫలితాన్ని $X_n$ అని సూచిస్తే, $X_n$ తీసికొనే సంభవ విలువల సమితి $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 3, 1, 5, 4, 4, 2, 6, 1, 6, 3, ... వంటి ఏదైనా ఒక అనుక్రమము యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ, $\{X_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$ యొక్క టిపికల్ (typical) సంభవ విలువగా పరిగణించవచ్చు. హైదరాబాద్ టెలిఫోన్ ఎక్స్ఛేంజివద్ద $(0, t)$ కాలాంతరంలో అందుకొనే ఫోన్ పిలుపుల సంఖ్య, $X_t$, యాదృచ్ఛిక చలరాశి అవుతుంది. ఏదైనా $t$ సమయంలో

ఒక థర్మల్ స్టేషన్‌వద్ద అయిన విద్యుదుత్పాదన $X_t$ (mgw) అయితే, X యాదృచ్ఛిక చలరాశి అవుతుంది. కాని t కనక మారుతూపోతే, t లో $X_t$ ప్రతిరూప ప్రమేయమవుతుంది. ఇదేవిధంగా ధవళేశ్వరం ఆనకట్టవద్ద గోదావరి నీటికొలత t సమయానికి $X_t(\omega)$ సెం.మీ. అయితే, $X_t(\omega)$ యాదృచ్ఛిక చలరాశి అవుతుంది. ఇక్కడ t అనేది స్థిరవిలువ అయినా నీటిమట్టము t సమయానికి ఏదో ఒక యాదృచ్ఛిక విలువకు సమమవుతుంది. దీనికి అనేక యాదృచ్ఛిక కారణాలు ఉంటాయి. వీటి సమూహాన్ని S గాను, వీటిలో ఏదైనా ఒక కారణాన్ని ω గాను భావించవచ్చు. కాని t మారుతూ ఉంటే, t లో $X_t(\omega)$ ప్రక్రియయొక్క ప్రతిరూప ప్రమేయ మవుతుంది.

*1.1.1* స్థితి ఆవరణ (State space) : $X_t$ తీసికొనే సంభవ విలువలను స్థితులు (states) అనీ, ఈ సంభవ విలువల సమితిని స్థితి ఆవరణ (state space) అనీ అంటారు. స్థితుల సంఖ్య (i) పరిమితంగా గాని, సంఖ్యాక అపరిమితం (Countably infinite) గాగాని లేదా (ii) అవిచ్ఛిన్నంగాగాని ఉండవచ్చు. కాబట్టి స్థితులనుబట్టి స్థితి ఆవరణాన్ని (i) విచ్ఛిన్న స్థితి ఆవరణగాను, లేదా (ii) అవిచ్ఛిన్న స్థితి ఆవరణగాను పిలుస్తాము. (0, t] లో అందిన పిలుపులసంఖ్య $X_t$ అయితే, $\{X_t, t \geq 0\}$ యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియకు సంబంధించిన స్థితి ఆవరణ విచ్ఛిన్నసమితి. ఇది $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$. (0, t] లో నమోదు చేసిన గోదావరి నీటిమట్టం కొలత $X_t$ సెం. మీ. అయితే, $\{X_t\}$ కి సంబంధించిన స్థితి ఆవరణ అవిచ్ఛిన్న సమితి. ఇది $\{x \mid x \geq 0\}$ ఇంతేకాక $X_t$ సంకీర్ణ విలువలను కూడా తీసుకొనవచ్చు. కాని ఈ పుస్తకంలో వానిని గురించి చర్చించడంలేదు.

*1.1.2* సూచిక సమితి (Index set) : యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ $\{X_t, t \in T\}$ లోని $X_t$ ల సంఖ్య (i) పరిమితంగా గాని లేదా సంఖ్యాక అపరిమితంగా గాని, లేదా (ii) అవిచ్ఛినం లేదా అనంతంగా గానిఉంటుంది. ఇది సమితి T పై ఆధారపడుతుంది.

(a) T గణనీయ సమితి (countable set), అంటే, T సమితి

$\{t \mid t = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ ; n పరిమిత ధన పూర్ణాంకము$\}$ గాని

లేదా $\{t \mid t = 0, 1, 2 \ldots\ldots\ldots\}$ గాని

లేదా $\{t \mid t = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots\ldots\}$ అయితే,

$\{X_t, t \in T\}$ యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ రూపము $\{X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}\}$ గాని, లేదా $\{X_0, X_1, X_2, \ldots\}$ తో గాని, లేదా $\{\ldots, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \ldots\}$ తో గాని ఏకీభవిస్తుంది. ఇవి గణనీయ సమూహాలు.

(b) T అవిచ్ఛిన్న సమితి, అంటే T సమితి

$\{t \mid a \leq t \leq b;$ a, b లు వాస్తవ సంఖ్యలు$\}$,

లేదా $\{t \mid 0 \leq t < \infty\}$, లేదా $\{t \mid -\infty < t < \infty\}$ అయితే, $\{X_t, t \varepsilon T\}$ ప్రక్రియ-అనంత సమూహము అవుతుంది.

$\{X_t, t \varepsilon T\}$ లోని t ని పరామితి అనీ, T ని పరామితి సమితి లేదా సూచిక సమితి అనీ; T గణనీయ పరామితి సమితి అయితే, t ని విచ్ఛిన్న పరామితి అనీ; T అవిచ్ఛిన్న పరామిత సమితి అయితే, t ని అవిచ్ఛిన్న పరామితి అనీ పిలుస్తాము. t ని బట్టి T సమితిని విచ్ఛిన్న లేదా అవిచ్ఛిన్న పరామితి సమితి అనడం పరిపాటి. ఇంతవరకు మనము T ని వాస్తవ సమితి గానే భావించాము. కాని T ని ఇలా భావించడం అనేది గణితీయ వాదనకు నిలబడక పోవచ్చు. అంతేకాక t ఒక్క సమయాన్నే సూచించవలసిన అవసరం కూడా లేదు. కొన్ని పరిస్థితులలో t భౌతిక పరిమాణాత్మక విలువలను కూడా సూచించవచ్చు. ఉదాహరణకు, లోహపు రేకుపై గల లోపాలను పరిశీలించేటప్పుడు, రేకు వైశాల్యాన్ని సూచిక పరామితి, t, తో సూచిస్తూ, t వైశాల్యపు రేకుపై గల లోపాల సంఖ్య. $X_t$, ని యాదృచ్ఛిక చలరాశిగా భావిస్తే, $\{X_t, t \geq 0\}$ యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ అవుతుంది. ఇదే విధంగా, కర్మాగారంలో తయారయ్యే ఇనప కమ్మీల అడ్డకోత (cross section) వైశాల్యాన్ని పరిశీలించేటప్పుడు కమ్మీ పొడవును సూచిక పరామితి, t, అనుకొంటే, t పొడవుగల ఇనప కమ్మీ చివర అడ్డకోత వైశాల్యము $\{X_t\}$ ని యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియగా భావించవచ్చు.

$X_t$ తీసికొనే విలువ $x_t$ సంఖ్యాత్మక విలువే కానవసరం లేదు. కాని ఈ పుస్తకంలో ఏకఘాతీయ* సూచిక సమితి, T, తో $X_t$ స్వీకరించే సంభవ విలువలు వాస్తవసంఖ్యా విలువలుగా గల యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియలను మాత్రమే చర్చిస్తాము.

*1.1.3 సంభావ్యతా విభాజనము* (Probability distribution): స్థిరమైన పరామితి, t వద్ద $X_t$ యాదృచ్ఛిక చలరాశి అవుతుంది. కాబట్టి $\{X_t\}$ ప్రక్రియ యొక్క సంభావ్యతా విభాజనాన్ని t వద్ద మామూలు యాదృచ్ఛిక చలరాశి X యొక్క విభాజనాన్ని కనుక్కొనే పద్ధతిలోనే నిర్ణయించవచ్చు. కాని, సమితి T లో t చలించినప్పుడు, $\{X_t, t \varepsilon T\}$ యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ ఉద్భవిస్తుంది. దీనిని $\{X_t\}$ లోని యాదృచ్ఛిక చలరాశుల సంయుక్త విభాజనము (joint distribution) ద్వారా వర్ణించవచ్చు. T అవిచ్ఛిన్న సమితి అయ్యే సందర్భంలో $\{X_t, t \varepsilon T\}$ లోని యాదృచ్ఛిక చలరాశుల సంఖ్య అనంతమై, దాని సంయుక్త విభాజనాన్ని నిర్ణయించడం అసంభవమవుతుంది. ఈ పరిస్థితులలో ప్రక్రియను వర్ణించడానికై ఏదైనా $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ అనే $n\ (< \infty)$ యాదృచ్ఛిక

---

* $t \varepsilon T, h \varepsilon T \Rightarrow t + h \varepsilon T$ అనే ధర్మంగల సూచిక సమితి T ని ఏకఘాతీయ సూచిక సమితి (linear index set) అంటారు.

$\{0, \mp 1, \mp 2, \ldots\}$, $\{x \mid -\infty < n < \infty\}$ లు ఏకఘాతీయ వాస్తవ సమితులు.

పరామితికి, స్థితికి చెందిన ఆవరణల లక్షణాల దృష్ట్యా వర్గీకరించిన వివిధ యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియలను దిగువ చూడవచ్చు :

(a) విచ్ఛిన్న పరామితి, విచ్ఛిన్న స్థితికి చెందిన ఆవరణలుగల యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియలు :

ఉదాహరణకు : (i) పాచికను పలుసార్లు దొర్లించడంలో t వ ప్రయత్నంలో పాచికపైగల బిందువుల సంఖ్య, $X_t$.

(ii) రోజువారిగా, అంటే t వ రోజున పనిలో నియమితులైన కార్మికుల సంఖ్య, $X_t$.

(b) అవిచ్ఛిన్న పరామితి, విచ్ఛిన్న స్థితులకు చెందిన ఆవరణలుగల యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియలు :

ఉదాహరణకు : (i) ప్రారంభం నుంచి t $(> 0)$ సమయానికి స్టాండువద్ద బస్సు కోసం నిరీక్షిస్తున్న విద్యార్థుల సంఖ్య $X_t$.

(ii) ఏదోరోజున t సమయానికి హైదరాబాదులో సంభవించిన బస్సు ప్రమాదాల సంఖ్య $X_t$.

(c) విచ్ఛిన్న పరామితి, అవిచ్ఛిన్న స్థితులకు చెందిన ఆవరణలుగల యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియలు :

ఉదాహరణకు : (i) t వ మగ్గపువాడు నేసిన చేనేతబట్ట పొడవు $X_t$.

(ii) రోజు (t) వారీగా నమోదుచేసిన గోదావరి ఆనకట్టవద్ద నీటి మట్టము, $X_t$.

(d) అవిచ్ఛిన్న పరామితి, అవిచ్ఛిన్న స్థితులకు చెందిన ఆవరణలుగల యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియలు :

ఉదాహరణకు : (i) హైదరాబాద్ నగరానికి రోజులో సప్లయి ప్రారంభం నుంచి t సమయం వరకు అందచేసిన నీటి పరిమాణము, $X_t$.

(ii) చేనేత పరిశ్రమలో t సమయం వరకు జరిగిన బట్ట ఉత్పత్తి.

ఇప్పుడు, యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ $\{X_t, t \in T\}$ లో $X_t$ ల మధ్యగల సంబంధాల దృష్ట్యా యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియలను దిగువ పేర్కొన్న ప్రక్రియలుగా వర్గీకరిస్తాము. అనుకూలతకోసం, ప్రస్తుతము $T = [0, \infty)$ అనీ, $X_t$ లు వాస్తవవిలువలనే స్వీకరించే యాదృచ్ఛిక చలరాశులనీ భావిద్దాము.

*1.2.1 స్వతంత్ర పెరుగుదలలుగల ప్రక్రియలు* (Process with indipendent-increments) : $T = [0, \infty)$ నుంచి $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ అయ్యేటట్లుగా ఎన్నుకొన్న ప్రతీ పరామితి సమితి, $\{t_1, \ldots, t_n\}$, కి $X_o = 0$ అయి, $X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులు అయితే, $\{X_t, t \in T\}$ ని స్వతంత్ర పెరుగుదలలుగల ప్రక్రియగా పిలుస్తాము. ఇక్కడ $n > 0$ విలువ ఏదైనా పరిమిత పూర్ణాంకం కావచ్చునని గమనించవలె. కాని $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$ అయితే, స్వతంత్ర పెరుగుదలలుగల ప్రక్రియ $\{X_t, t \in T\}$ ను స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులు

$$Z_0 = X_0,\ Z_i = X_i - X_{i-1}\ ;\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

యొక్క అనుక్రమము (sequence) గా వ్రాయవచ్చు. కాబట్టి,

$$X_i = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_i \quad \text{అనీ,}$$

అటువంటి యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ $\{X_t, t = 0, 1, 2, \ldots\}$ ను స్వతంత్ర పెరుగుదలలు గల ప్రక్రియతో చెప్పవచ్చు. అప్పుడు ఈ అనుక్రమంలోని $Z_i$ల ఉపాంత (marginal) విభాజకాల ఆధారంగా $X_i$ ల సంయుక్త విభాజనాన్ని నిర్ణయించి, $\{X_t, t = 0, 1, \ldots\}$ ను క్షుణ్ణంగా పరిశీలించవచ్చు.

*1.2.2 మార్కోవ్ ప్రక్రియలు* (Markov Processes) : T నుంచి $t_1 < t_2 < t_3$ అయ్యేటట్లు ఎన్నుకొన్న ప్రతి $t_1, t_2, t_3$ లకు, షరతు సంభావ్యత (conditional probability) $P(X_{t_3} \in A \quad X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2)$ ప్రతీ $x_1$ విలువకు, ఈ షరతు సంభావ్యత $P(X_{t_3} \in A \quad X_{t_2} = x_2)$ కు సమానమైతే, అట్లాంటి ప్రక్రియ $\{X_t, t \in T\}$ ను మార్కోవ్ ప్రక్రియ (Markov process) అంటారు. అంటే, $\{X_t, t \in T\}$ మార్కోవ్ ప్రక్రియ అయితే, ప్రక్రియలో $t_2$కు చెందిన వర్తమాన విలువ $(x_2)$ తెలిస్తే, $t_3$కు చెందిన భావికాలపు విలువ $X_{t_3}$, $t_1$కి చెందిన భూతకాలపు విలువ $(x_1)$ పై ఆధారపడక, $x_2$ పైనే ఆధారపడుతుందన్నమాట. ఇదే విషయాన్ని n విలువలకు విస్తృతీకరించి, సంకేతాలలో వ్రాస్తే, Tకి చెంది, $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t$ అయ్యేటట్లుగా ప్రతి $t_1, \ldots, t_n, t$ లకు సంబంధించి, స్థితి ఆవరణ S లోని ప్రతి $x_1, x_2, \ldots, x_n$ కు సంబంధించిన ఏ ప్రక్రియ $\{X_t, t \in T\}$ కు,

$$P(X_t \leq a \quad X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n)$$

$$= P(X_t \leq a\ X_{tn} = X_n) \qquad \ldots \qquad (1.2.1)$$

అవుతుందో, ఆ ప్రక్రియను మార్కోవ్ ప్రక్రియగా నిర్వచిస్తాము.

$$P(s, x; t, a) = P(X_t \varepsilon A \ X_s = x); \ A = \{x \ x \leq a\}$$

అనే ప్రమేయాన్ని మార్కోవ్ ప్రక్రియ సంక్రమ సంభావ్యతా ప్రమేయము (Transition probability function) అని పిలుస్తాము. పై (1.2.1) నియమాన్ని మార్కోవ్ నియమ మంటాము. దీనిని పై సంక్రమ సంభావ్యతా ప్రమేయ రూపంలో వ్రాస్తే.

$$P(X_t \leq a \ X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n) = P(t_n, x_n; t, a)$$

$\{X_t, t \varepsilon T = [t_0, \infty)\}$ స్వతంత్ర పెరుగుదలలుగల యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ అయి, ఏదేని స్థిరసంఖ్య b కి, $P(X_{t_0} = b) = 1$ అయితే, $\{X_t, t \varepsilon T\}$ ని మార్కోవ్ ప్రక్రియగా పరిగణించవచ్చు.

ఇక్కడ b ఏ వాస్తవ సంఖ్య అయినా కావచ్చు.

పైన చెప్పినట్లు $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ అయ్యేటట్లు $t_0, t_1, \ldots, t_n$ లను T నుంచి ఎన్నుకొని,

$$X_{t_n} = X_{t_0} + \sum_{m=1}^{n} (X_{t_m} - X_{t_{m-1}})$$

$$= b + \sum_{m=1}^{n} Z_m \text{ గా వ్రాయవచ్చు.}$$

ఇక్కడ $Z_m = X_{t_m} - X_{t_{m-1}}$, $(m = 1, 2, \ldots, n)$లు స్వతంత్ర పెరుగుదలలను సూచించే స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులు కాబట్టి,

$$P(X_{t_n} \leq x \ X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1})$$

$$= P(X_{t_n} \leq x \ X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) \text{ అవుతుంది.}$$

∴ స్వతంత్ర పెరుగుదలలుగల యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ $\{X_t, t \varepsilon T\}$ మార్కోవ్ ప్రక్రియ అవుతుంది. కాని దీని విపర్యయ ఫలితము నిజం కాకపోవచ్చు. ఎందుచేతనంటే, $P(X_{t_0} = 0) = 1$ తో $\{X_t, t \varepsilon T = [t_0, \infty)\}$ ను మార్కోవ్ ప్రక్రియ అనుకోండి. అప్పుడు $t_0 < t_1 < t_2 < \infty$ అయ్యేటట్లు T లోని ఏ రెండు పరామితి విలువలు $t_1, t_2$ కు సంబంధించి

$$P(X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_1 + x_2) = P(X_{t_1} = x_1, X_{t_2} - X_{t_1} = x_2)$$

$$= P(X_{t_1} = x_1) \cdot P(X_{t_2} - X_{t_1} = x_2 \ X_{t_1} = x_1)$$

అవుతుంది. కాని పై ప్రక్రియ స్వతంత్ర పెరుగుదలలుగల యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ అయినట్లయితే.

$$P(X_{t_1} = x_1, X_{t_2} - X_{t_1} = x_2) = P(X_{t_1} = x_1) \cdot P(X_{t_2} - X_{t_1} = x_2)$$

ఈ రెండు వేరుకాబట్టి మార్కోవ్ ప్రక్రియను ఎల్లప్పుడు స్వతంత్ర పెరుగుదలలుగల యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియగా పరిగణించలేము. మార్కోవ్ ప్రక్రియల వర్ణనలో సంక్రమ సంభావ్యతా ప్రమేయాల ప్రధాన పాత్రను 2వ అధ్యాయంలో సమగ్రంగా పరిశీలిస్తాము.

*1.2.3* మార్టింగేల్సు (Martingales): విచ్ఛిన్న లేదా అవిచ్ఛిన్న పరామితి సమితి, T, లో $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1}$ ని సంతృప్తిపరచే ప్రతి సమితి $\{t_1, \ldots, t_{n+1}\}$ కి గాను, S లోని ప్రతి $x_1, x_2, \ldots, x_n$ స్థితులకు గాను, ఏ ప్రక్రియ $\{X_t, t \in T\}$ కు

$$E(X_{t_{n+1}} \mid X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n) = x_n \qquad \ldots \quad (1.2.2)$$

అవుతుందో, అటువంటి ప్రక్రియను మార్టింగేలు (martingale) అంటారు. (1.2.2) ను మార్టిం గేల్ సమానత్వము (martingale equality) అంటారు.

$\{Y_n, n = 1, 2, \ldots\}$ ప్రక్రియలోని $Y_n$ లు స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులై $E(Y_n) = 0$, $n > 1$ అయితే $X_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ గా నిర్వచించిన యాదృచ్ఛిక చలరాశుల సమూహము $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ మార్టింగేలు అవుతుంది. ఎందుచేతనంటే,

$$\begin{aligned} E(X_{n+1} \mid X_n = x_n, \ldots, X_1 = x_1) &= E(X_n + Y_{n+1} \mid X_n = x_n, \ldots, X_1 = x_1) \\ &= E(X_n \mid X_n = x_n, \ldots, X_1 = x_1) + E(Y_{n+1}) \\ &= x_n. \end{aligned}$$

మొదటి ఆట ప్రారంభంలో వున్న జూదరి ధనాన్ని $x_1$ తోను 'n' వ ఆట కాగానే జూదరి వద్ద ఉన్న మొత్తం ధనం $X_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ తోను సూచిస్తే, $X_{n+1}$ యాదృచ్ఛిక చలరాశి అవుతుంది. ప్రతి ఆట చివరన జూదరి వద్ద నుంచీ నగటు ధనము, ఆట ప్రారంభంలో ఉన్న దానికి సమానమైతే, ఆ జూదరి ఆటను నిష్పాక్షికపు ఆట

(fair game) అని అంటారు. అంటే,

$$E(X_{n+1} \mid X_n = x_n, \ldots, X_1 = x_1) = x_n.$$

మార్టింగేలును నిష్పాక్షిక జూదపు ఆటలకు తగిన సమూనాగా పరిగణిస్తారు. మరో విధంగా $t$ సమయానికి జూదరి గెలుపును $X_t$ తో సూచిస్తే, (1.2.2) ప్రకారం $t_n$ సమయానికి జూదరి మొత్తం గెలుపు $x_n$ అయితే, $t_{n+1}$ సమయానికి అతని సగటు గెలుపు $x_n$ కావలె. ఇది $t_1, \ldots, t_{n-1}$ సమయాల వరకు వచ్చిన గెలుపులపై ఆధారపడదని భావించవచ్చు.

$\{X_t, t \geq 0\}$ ప్రక్రియలో స్వతంత్ర పెరుగుదలలు గలిగి, $P(X_0 = 0) = 1$, ప్రతి $t > 0$, $E|X_t| < \infty$, $E(X_t) =$ స్థిరాంకమయ్యే ప్రతి $\{X_t, t \geq 0\}$ కూడా మార్టింగేలు అవుతుంది. $Y_1 = X_{t_1}$, $Y_2 = X_{t_2} - X_{t_1}$, .... లు స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులు.

$$X_{t_{n+1}} = X_{t_1} + (X_{t_2} - X_{t_1}) + \ldots + (X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) + (X_{t_{n+1}} - X_{t_n})$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} Y_j$$

$$E(X_{t_{n+1}} \mid X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n)$$
$$= E\{X_{t_n} + (X_{t_{n+1}} - x_{t_n}) \mid X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n\}$$
$$= E\{X_{t_n} \mid X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n\} \qquad (\because E(X_{t_{n+1}}) = E(X_{t_n}))$$
$$= x_n.$$

దీనిని గురించి ఇంకా తెలుసుకో కుతూహలంగల చదవరులు Doob వ్రాసిన "Stochastic Process" అనే గ్రంథాన్ని సంప్రదించవచ్చు.

*1.2.4 స్థావర ప్రక్రియలు* (Stationary Processes) : $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ ని T లోని ఏదో ఒక n పరామితి విలువల సమితి అని అనుకోండి. ప్రతి వాస్తవాంకము $h > 0$ ప్రతి సమితి $\{t_1, \ldots, t_n\}$ కి, $\{X_t, t \in T\}$ లోని $\{X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_n+h}\}$, $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}\}$ అనే రెండు చలరాశుల సమితులు ఒకే సంయుక్త విభాజన ప్రమేయంగల యాదృచ్ఛిక చలరాశుల సమూహాలైతే, $\{X_t, t \in T\}$ ని

స్థావర యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ అంటారు. అంటే, విభాజన ప్రమేయాల రూపంలో, ఏ ఏ ప్రక్రియకు.

$$F(x_1,\ldots, x_n;\ t_1,\ldots,t_n)$$
$$=F(x_1, \ldots ,x_n;\ t_1+h,\ldots,t_n+h) \quad \ldots \quad (1.2.3)$$

నిజమవుతుందో, అది స్థావర యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ.

స్థావర యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియలు ఎప్పుడూ సంభావ్యతా సంబంధిత సమతా స్థితిలో ఉంటాయని (1.2.3) ద్వారా వ్యక్తమవుతుంది. ఈ ప్రక్రియల విషయంలో పరిశీలనా సమయాలపై ఆధారపడక, t చలిస్తున్నా $X_t$ లన్నీ ఒకే విభాజనాన్ని అనుసరిస్తాయన్న మాట. (1.2.3) ప్రకారం $X_t$ యొక్క విభాజన ప్రమేయము

$$P(X_t \leq x) = F(x; t) = F(x; 0) = F(x) \text{ అనుకోండి.}$$

ఇక్కడ $n=1$, $h=t$ గా తీసుకొన్నాము. 2వ ఆర్డరు ఘాతికలు పరిమితమై, ప్రతి $h>0$, $t \in T$ కి గాను, సహవిస్తృతి ప్రమేయము

$$C(t,\ t+h) = Cov(X_t, X_{t+h}) = E(X_t X_{t+h}) - E(X_t)\, E(X_{t+h})$$
$$=C(0,\ h)$$

అవుతుందో; అంటే, ఎప్పుడు $C(t,\ t+h)$, h పైనే ఆధారపడి ఉంటుందో, ఆ ప్రక్రియను విస్తృతార్థ (wide sense) స్థావర లేదా సహవిస్తృతి స్థావర ప్రక్రియగా పిలుస్తారు.

## 1.3. కొన్ని సామాన్య యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియలు

ఈ అధ్యాయం ముగియకముందు సామాన్యంగా మనకు ఎదురయ్యే కొన్ని యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియలను గురించి చర్చిద్దాము.

### 1.3.1 బెర్నోలీ ప్రక్రియ (Bernoulli Process) :

ఇది విచ్ఛిన్న పరామితి, విచ్ఛిన స్థితి అవరణలుగల ప్రక్రియ, 'సఫలము', 'విఫలము అనే రెండు ఫలితాలుగల స్వతంత్ర పునరావృత ప్రయత్నాల శ్రేణిని పరిశీలించండి. ప్రతీ ప్రయత్నంలోను 'సఫలము', 'విఫలము'ల సంభావ్యతలను వరసగా p, q లతో సంకేతిస్తే, $p \geq 0$, $q \geq 0$; $p+q=1$ అవుతాయి. 'n' ప్రయత్నాలలో సంభవించే సఫలాల సంఖ్యను $S_n$తో సంకేతిస్తే, యాదృచ్ఛిక చలరాశి, $S_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ యొక్క సంభావ్యతా విభాజనము

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad , k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$\{S_n, n = 1, 2, \ldots\}$ అనే యాదృచ్ఛిక చలరాశుల సమూహము $\{0, 1, 2, \ldots\}$ స్థితి ఆవరణగాగల యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ అని స్పష్టమవుతుంది. ఈ ప్రక్రియను బెర్నోలీ ప్రక్రియ (Bernulli process) అని పిలుస్తాము.

$(k-1)$ వ సఫలము తరవాత $k$ వ సఫలము సంభవించడానికి అవసరమయ్యే ప్రయత్నాల సంఖ్య (అంటే, $k-1$, $k$ వ సఫలాల మధ్య ప్రయత్నాల సంఖ్య) $W_k$ తో సూచిస్తే, ప్రతి $k$ కి $W_k$ యొక్క విభాజనము

$$P(W_k = r) = q^{r-1}p, \quad r = 1, 2, \ldots\ldots$$

ఇక్కడ $W_k$ లు స్వతంత్ర చలరాశులై ఒకే జ్యామితీయ విభాజనము (Geometric distribution) ను అనుసరించే యాదృచ్ఛిక చలరాశులని గమనించవచ్చు. కాబట్టి బెర్నోలీ ప్రక్రియను స్వతంత్ర పెరుగుదలలుగల ప్రక్రియగా పరిగణించవచ్చు. $0 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_n < i$ అయ్యే ప్రతి $n+1$ స్థితులు $i_1, \ldots, i_n, i$ కు

$$P(S_{n+1} = i \quad S_1 = i_1, \ldots\ldots, S_n = i_n)$$

$$= P(S_{n+1} = i \quad S_n = i_n)$$

కాబట్టి మార్కొవ్ నియమము (1.2.1) ప్రకారం బెర్నోలీ ప్రక్రియ విచ్ఛిన్న స్థితి ఆవరణ $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ గల మార్కొవ్ ప్రక్రియ అవుతుంది.

ఉదాహరణకు, పూర్తి అయిన $n$ వస్తువులలో గల దోష వస్తువులు $D_n$ అయితే $\{D_n, n = 1, 2, \ldots\}$ బెర్నోలీ ప్రక్రియ అవుతుంది.

*1.3.2 పాయిజాన్ ప్రక్రియ* (Poisson Process) : ఇది ఆవిచ్ఛిన్న పరామితి సమితి, విచ్ఛిన్న స్థితి ఆవరణగల యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ. దిగువ పేర్కొన్న స్వీకృతాలకు అనుగుణంగా సంభవించే ఘటనలను పరిశీలించండి.

(a) వివర్జిత కాలాంతరాలలో సంభవించే ఘటనలు పరస్పరం స్వతంత్రాలు అవడం.

(b) ఒక స్థిర ధనాంకము, $\lambda$ కు సంబంధించి $\triangle t$ అనే అతిస్వల్ప కాలాంతరంలో సంభవించే ఘటనలు సంభావ్యతలు :

(i) $P\{(t, t + \triangle t$ లో సంభవించే ఘటనల సంఖ్య $= 1\}$

$$= \lambda \triangle t + O(\triangle t)$$

(ii) $P\{(t, t + \triangle t$ లో సంభవించే ఘటనల సంఖ్య $> 1\} = O(\triangle t)$

అవడం. ఇక్కడ $\triangle t \to 0$ అయితే, $\dfrac{O(\triangle t)}{\triangle t} \to 0$ అవుతుందని $O(\triangle t)$ సూచిస్తుంది. పై (i), (ii) ధృవిష్టాల.

$$P\left[(t, t+\Delta t] \text{ లో సంభవించే ఘటనల సంఖ్య } = 0\right\} = 1 - \lambda\Delta t + O(\Delta t)$$

పై స్వీకృతాలకు అనుగుణంగా $(0, t]$ లో సంభవించే ఘటనల సంఖ్య $X_t$ తో సూచిస్తే $\{X_t, t \geq 0\}$ యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ అవుతుంది. దీని స్థితి ఆవరణ $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$. పై (a), (b) స్వీకృతాలననుసరించే ప్రతి $X_t$ $(t \geq 0)$ పాయిజాన్ విభాజనము.

$$P(X_t = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ను అనుసరిస్తుందని చూపవచ్చు. ఇట్టి $\{X_t, t \geq 0\}$ ను పాయిజాన్ ప్రక్రియ అంటారు. ఇక్కడ $\lambda$, $(0, t]$ లో ఒక యూనిట్ కాలంలో సంభవించే ఘటనల సగటురేటు (mean rate) ను తెలుపుతుంది.

(a), (b) స్వీకృతాల ప్రకారం ప్రతి $t, s > 0, t \neq s, (0, t], (s, s+t]$ లలో సంభవించే ఘటనలు $X_t - X_0$, $X_{s+t} - X_s$ స్వతంత్ర చలరాశులై ఒకే విభాజనాన్ని అనుసరిస్తాయి. కాబట్టి పాయిజాన్ ప్రక్రియ స్వతంత్ర పెరుగుదలలుగల స్థావరప్రక్రియ అవుతుంది. ఇక్కడ

$$P(X_{s+t} - X_s = k) = e^{-\lambda t}\frac{\{\lambda t\}^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\text{కాబట్టి } P(X_t - X_0 = k) = P(X_{s+t} - X_s = k)$$

మధ్యమ విలువ, విచలన ప్రమేయము

$$E(X_{s+t} - X_s) = \lambda t = \text{Var.}(X_{s+t} - X_s)$$

ఒకే పరామితిగల ఏదేని $X_s$, $X_t$ అనే రెండు పాయిజాన్ ప్రక్రియల సహవిస్తృతి ప్రమేయము

$$C(s,t) = \text{Cov}.(X_s, X_t) = E(X_s X_t) - E(X_s)E(X_t) \qquad (t > s)$$

$$= E[X_s\{(X_t - X_s) + X_s\}] - \lambda s . \lambda t$$

$$= E(X_s)E(X_t - X_s) + E(X_s^2) - \lambda s . \lambda t$$

$$= \lambda s . \lambda(t - s) + (\lambda s + \lambda^2 s^2) - \lambda s . \lambda t$$

$$= \lambda s = \lambda . \min(s, t)$$

$t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t$ అయ్యేటట్లు ప్రతి $t_1, t_2, \ldots, t_n, t$ లకు

$0 < i_1 < \ldots < i_n$ అయ్యే ప్రతి $i_1, \ldots, i_n, i$ పూర్ణాంకాలకు సంబధించి,

$$P(X_t = i \mid X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_n} = i_n) = P(X_t = i \mid X_{t_n} = i_n)$$

కాబట్టి మార్కోవ్ నియమము (1.2.1) ప్రకారం, పాయిజాన్ ప్రక్రియను స్థితి ఆవరణ $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ గాగల మార్కోవ్ ప్రక్రియగా పరిగణిస్తాము. పాయిజాన్ ప్రక్రియ గురించి సమగ్రంగా 3 వ అధ్యాయంలో చర్చిస్తాము.

*1.3.3* ద్విమూల్య ప్రక్రియలు (Two-valued Processes) : రెండు విలువలను స్వీకరించే బెర్నోలీ యాదృచ్ఛిక చలరాశులు సంభావ్యతా సిద్ధాంతంలో ప్రముఖ పాత్రను వహించినట్లే, యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియలలో కూడా ఏదేని రెండు వాస్తవ విలువలు a, b ను స్వీకరించే ప్రక్రియలకు ప్రత్యేక స్థానముంది. ఇటువంటి యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియలను ద్విమూల్య (Two-valued) ప్రక్రియలంటారు. ప్రత్యేకించి 1, − 1 అనే రెండు సంభవ విలువలను స్వీకరించే ద్విమూల్య ప్రక్రియ, $\{X_t, t \geq 0\}$, ను "1, − 1" (One - minus - One) ప్రక్రియ అంటారు. $\{X_t, t \geq 0\}$ అనేది "1, − 1" ప్రక్రియ అయితే,

$$Y_t = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} X_t \qquad \ldots \quad (1.3.1)$$

గా నిర్వచించిన $\{Y_t, t \geq 0\}$ ప్రక్రియ a, b సంభవ విలువలనే స్వీకరించే ద్విమూల్య ప్రక్రియ అని స్పష్టమవుతుంది.

"1, − 1" ప్రక్రియ $\{X_t, t \geq 0\}$ ను కింద పేర్కొన్న విధంగా కూడా వ్యక్తపరచవచ్చు. $t = 0$ అయితే, $N_t = 0$ ; $t > 0$ అయితే, $N_t$ ని $(0, t)$ లో "1, − 1" ప్రక్రియ, తన విలువల మధ్య చెందే మార్పుల సంఖ్యగా నిర్వచిద్దాము. అప్పుడు $\{N_t, t \geq 0\}$ 3 వ అధ్యాయంలో నిర్వచించిన గణన ప్రక్రియ (counting process) గా గ్రహిద్దాము. $X_0$ ని ప్రథమ విలువగా స్వీకరించే "1, − 1" ప్రక్రియ, $\{X_t, t \geq 0\}$ ను

$$X_t = X_0 (-1)^{N_t} \qquad \ldots \quad (1.3.2)$$

గా వ్యక్తీకరించవచ్చు.

ప్రత్యేకించి $\{N_t, t \geq 0\}$ అనే గణన ప్రక్రియ ఒక పాయిజాన్ ప్రక్రియ అయితే, (1.3.2) లో నిర్వచించిన $\{X_t, t \geq 0\}$ ను యాదృచ్ఛిక టెలిగ్రాఫ్ సిగ్నల్

(random telegraph signal) అంటారు. అంటే, (1.3.2) లో నిర్వచించిన $\{X_t, t \geq 0\}$ కు సంబంధించి,

(i) ప్రక్రియ యొక్క సంభవ విలువలు వరసగా 1, — 1 అయి,

(ii) $\{N_t, t \geq 0\}$ పాయిజాన్ ప్రక్రియ అయి,

(iii) ప్రక్రియ ప్రథమ విలువ $X_0$, $N_t$ తో స్వతంత్రించి అనుసరించే యాదృచ్ఛిక చలరాశి అయి,

$$P(X_0 = 1) = \tfrac{1}{2} = P(X_0 = -1)$$

అయితే, $\{X_t, t \geq 0\}$ ని యాదృచ్ఛిక టెలిగ్రాఫ్ సిగ్నల్ అంటాము. యాదృచ్ఛిక సిగ్నల్ జనరేటర్ల నిర్మాణంలో ఈ యాదృచ్ఛిక టెలిగ్రాఫ్ సిగ్నల్ సిద్ధాంతము విరివిగా ఉపయోగిస్తారు.

$\{N_t, t \geq 0\}$ ప్రక్రియ స్వతంత్ర పెరుగుదలలుగల ఒక ధన పూర్ణాంక విలువల ప్రక్రియ అయి,

$$X_t = X_0(-1)^{N_t}$$

$X_0$, పై (iii) లో వలె నిర్వచింపబడిన యాదృచ్ఛిక చలరాశి అయితే, $\{X_t, t \geq 0\}$ అనే ప్రక్రియ "1, − 1" ప్రక్రియ అవుతుందని రుజువుచేయవచ్చు.

సున్న, ఒకటి అనే సంభవ విలువలను స్వీకరించే ద్విమూల్య ప్రక్రియను "0, 1" (zero-one) ప్రక్రియ అనడంకూడా పరిపాటి. ఏదైనా యంత్రాన్ని పరిశీలించేటప్పుడు, అది "on" లేదా "off" అనే రెండేరెండు స్థితులలో ఉండవచ్చు ఆ యంత్రము "on" (స్థితి) లో ఉంటే, అది చెడిపోయేముందు యాదృచ్ఛిక కాలం వరకు పనిచేయవచ్చు. "off" స్థితిలో ఉన్నదంటే, అది పూర్తిగా మరమత్తు (repair) అయ్యేటంత యాదృచ్ఛిక కాలమూ "off" స్థితిలోనే ఉంటుంది. అప్పుడు t క్షణం వద్ద యంత్రం "on"లో ఉంటే $X_t = 1$ అనీ, "off" స్థితిలో ఉంటే, $X_t = 0$ అనీ వ్రాసి "0, 1" ప్రక్రియను నిర్వచించవచ్చు.

పై ఉదాహరణలో వర్ణించిన $\{X_t, t \geq 0\}$ యొక్క లక్షణాలను పరిశీలించేటప్పుడు ప్రక్రియ 0, 1 విలువలకు మధ్య మార్పుచెందడానికి పట్టేకాలాల గురించి కింద పేర్కొన్న ఉపకల్పనలు సమంజసమని తోస్తుంది. "0, 1" ప్రక్రియలో $0 \longrightarrow 1$ పట్టు కాలం ఒక అవిచ్ఛిన్న విభాజనాన్ని అనుసరించే యాదృచ్ఛిక చలరాశి U; $1 \longrightarrow 0$ పట్టు కాలం మరో అవిచ్ఛిన్న విభాజనాన్ని అనుసరించే యాదృచ్ఛిక చలరాశి V అవుతాయి. $\{X_t, t \geq 0\}$ అనేది ఈ ఉపకల్పనలను సంతృప్తిపరిచే ప్రక్రియ అయి, U, V లు పరిమిత అంకమధ్యమాలుగల అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశులు అయితే,

$$\lim_{t \to 0} P[X_t = 0] = \frac{E(U)}{E(U) + E(V)}$$

$$\lim_{t \to 0} P[X_t = 1] = \frac{E(V)}{E(U) + E(V)}$$

అని చూపవచ్చు. దీనిని 3.9.3 ప్రకరణంలో చూడండి.

*1.3.4 గాసియన్ లేదా సామాన్య ప్రక్రియ* (Gaussian or normal process) : ఇది అవిచ్ఛిన్న పరామితి, అవిచ్ఛిన్న స్థితి ఆవరణలుగల ప్రక్రియ. ప్రతి పరామితి విలువల సమితి $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ కు సంబంధించిన ఏ ప్రక్రియలోని $X_{t_r}, r = 1, 2, \ldots, n$ ల సంయుక్త విభాజనము n-చలరాశుల సామాన్య విభాజనము (n-variate normal distribution) అవుతుందో, అట్టి ప్రక్రియను గ్యాసియన్ ప్రక్రియ లేదా సామాన్య ప్రక్రియ అంటారు. దీని లాక్షణిక ప్రమేయం (characteristic function ద్వారా ఈ ప్రక్రియను వివరిద్దాము. ప్రతి $\theta_1, \ldots, \theta_n$, అనే n వాస్తవాంకాలకు $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ ల సంయుక్త లాక్షణిక ప్రమేయము

$$\phi_{X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}}(\theta_1, \ldots, \theta_n) = E\left[\exp\left\{i\left(\theta_1 X_{t_1} + \ldots + \theta_n X_{t_n}\right)\right\}\right]$$

$$= \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{n} \theta_j E(X_{t_j}) - \tfrac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \theta_j \theta_k \operatorname{cov}(X_{t_j}, X_{t_k}) \right\} \quad (1.3.3)$$

$i = \sqrt{-1}$ అయితే, $\{X_t, t \geq 0\}$ ను సామాన్య ప్రక్రియగా నిర్వచిస్తాము. (1.3.3) ని పరిశీలిస్తే, ఈ ప్రక్రియ మాధ్యమ విలువ ప్రమేయము $E(X_t)$; సహవిస్తృతి ప్రమేయము $C(X_s, X_t)$ లతో ఈ ప్రక్రియను సంపూర్ణంగా వర్ణించవచ్చునని వ్యక్తమవుతుంది. ఇంతేకాక $X_{t_r}$ లు పరస్పర స్వతంత్ర చలరాశులై ప్రతి t కి $X_t$ సామాన్య విభాజనాన్ని అనుసరిస్తే, అట్టి గాసియన్ ప్రక్రియను శుద్ధ గాసియన్ శ్రేణి (pure Gaussian series) అంటారు.

యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియా సిద్ధాంతంలో సామాన్య ప్రక్రియ ప్రధానపాత్ర వహిస్తుంది. దీనిని పెక్కు ప్రక్రియలకు ఉజ్జాయింపు ప్రక్రియగా స్వీకరిస్తాము. వేరే ప్రక్రియలలోవలె కాక, దీనికి సంబంధించిన కొన్ని క్లిష్ట ప్రశ్నలకుకూడా అతిసులువుగా సమాధానాలను రాబట్టవచ్చు. దీనిని టెలిగ్రాఫ్ సిగ్నల్ సిద్ధాంతంవంటి అనేక సిద్ధాంతాలలో విరివిగా అనువర్తించడం జరిగింది. దీనిని గురించి 4 వ అధ్యాయంలోకూడా చూడండి.

*1.3.5 వీనర్ ప్రక్రియ* (Weiner Process) : ఇది అవిచ్ఛిన్న పరామితి, అవిచ్ఛిన్న స్థితి ఆవరణలుగల యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ. క్రింద పేర్కొన్న లక్షణాలుగల ఏ

ప్రక్రియ $\{X_t, t \geq 0\}$ అయినా వీనర్ లేదా బ్రౌనియన్ (Weiner or Brownian) ప్రక్రియ అని అంటారు.

(i) $\{X_t, t \geq 0\}$ స్వతంత్ర పెరుగుదలలతో స్థావర ప్రక్రియగాను,

(ii) ప్రతి $t > 0$ కు, $X_t$ సామాన్య విభాజనాన్ని అనుసరించే యాదృచ్ఛిక చలరాశిగాను,

(iii) $X_0 = 0$, $E(X_t) = 0$. $\forall\, t > 0$ గాను ఉండవలె. పై లక్షణాల దృష్ట్యా $t \geq s \geq 0$ కి సంబంధించి,

$$E(X_t - X_s) = 0, \text{ var. } (X_t - X_s) = \sigma^2 (t - s),$$

లతో $X_t - X_s$ సామాన్య విభాజనాన్ని అనుసరించే యాదృచ్ఛిక చలరాశి అని స్పష్టమవుతుంది. $X_s$, $X_t$ లు $(s \neq t)$ సామాన్య యాదృచ్ఛిక చలరాశులు అయితే, వాటి సహవిస్తృతి ప్రమేయము

$$\begin{aligned} C(s, t) = \text{cov}(X_s, X_t) &= E(X_s X_t) \\ &= E\{X_s (X_t - X_s + X_s)\} \\ &= E\, X_s (X_t - X_s) + E(X_s^2) \quad (t > s) \\ &= \sigma^2 (s) = \sigma^2 \min(s, t). \end{aligned}$$

పై (ii) దృష్ట్యా వీనర్ ప్రక్రియ కూడా సామాన్య ప్రక్రియ అని తెలుస్తుంది. కాని సామాన్య ప్రక్రియలన్నీ వీనర్ ప్రక్రియ కానక్కరలేదు. నిర్వచనంలోని మిగిలిన నియమాలను పాటించినప్పుడే అవి వీనర్ ప్రక్రియలు అవుతాయి.

ప్రతీ శాస్త్రంలోను ప్రత్యేకించి భౌతిక శాస్త్రంలో వీనర్ ప్రక్రియను పెక్కువిధాలుగా అనువర్తిస్తున్నారు. దీనిని బ్రౌనియన్ చలనము (Brownian motion) నకు నమూనాగా పరిగణిస్తారు. ద్రవ పదార్థంలో మునిగిన అణువును మైక్రోస్కోపు ద్వారా పరిశీలిస్తే అది యాదృచ్ఛిక సామీప్య పీడనలవల్ల అవిరామంగా చలిస్తున్నట్లు 1827 లో రాబర్ట్ బ్రౌన్ (Robert Brown) అనే ఆంగ్ల శాస్త్రవేత్త కనుక్కోవడంవల్ల ఆ అణువు చలనాన్ని బ్రౌనియన్ చలనమన్నారు.

బ్రౌనియన్ చలనంలో ఉన్న అణువు $(0, t]$ లో చలించిన దూరం $X_t$ అనుకోండి. $X_0 = 0$ గా భావించి, $(s, t]$ అనే కాలాంతరంలో ఆ అణువు కదలే దూరం, $X_t - X_s$, $(s, t]$ లోని అన్ని క్షణాలలోను చలించిన స్వల్ప దూరాల మొత్తానికి సమానం కాబట్టి కేంద్రీయ సీమా సిద్ధాంతం ప్రకారం $X_t - X_s$ ను సామాన్య యాదృచ్ఛిక చలరాశిగా పరిగణించవచ్చు గదా! అదే విధంగా $(s, t]$ లో చలించిన దూరము, $X_t - X_s$ యొక్క విభాజనం ప్రతి $h > 0$ కు $(s + h, t + h]$ లో చలించిన దూరము, $X_{t+h} - X_{s+h}$

యొక్క విభాజనము ఒకటేనన్న ఉపకల్పన సరికావచ్చు. ఎందుకంటే, అణువు ఉన్న ద్రవము సమతాస్థితిలో ఉండడం చేత చలించిన దూరం కాలాంతరము $t + h - s - h = t - s$ పై ఆధారపడి, మన పరిశీలనా ప్రారంభ సమయంపై కాదు కనక $\{X_t, t \geq 0\}$ ని స్వతంత్ర పెరుగుదలలు గల ప్రక్రియగాను, ప్రతి $h > 0$ కు $X_{t+h} - X_{s+h}$, $X_t - X_s$ లు ఒకే సామాన్య విభాజనాన్ని అనుసరిస్తాయి కాబట్టి దీనిని స్థావర ప్రక్రియగాను ఊహించడం న్యాయంగా తోస్తుంది. బ్రౌనియన్ చలనానికి వీనర్ ప్రక్రియ సమూనా అనడంలో అతిశయోక్తి లేదు కాబట్టి వీనర్ ప్రక్రియను బ్రౌనియన్ ప్రక్రియ (Brownian motion Process) అని కూడ పిలుస్తారు.

# 2

# మార్కోవ్ శృంఖలాలు

(MARKOV CHAINS)

ఒక నిర్ణీత సమయం $t_0$ వద్ద భౌతిక వ్యవస్థ (Physical system) ఒక స్థితి (state) లో ఉండే సమాచారం ఆధారంగా భావి కాలము $t_1$ ($> t_0$) లో అది ఏ స్థితిలో ఉంటుందో అని ఊహించగల శక్తి సాంప్రదాయ భౌతిక శాస్త్రంలో అవసరమైన అతి ముఖ్యమైన విషయము. దీని ఆధారంగా భౌతిక వ్యవస్థను విశ్లేషించగల ప్రాథమిక పద్ధతిని నిర్ణయించవచ్చు. నిర్ణీత సమయం ($t_1$) లో భౌతిక వ్యవస్థ ఉండే స్థితి ఆధారంగా భూత కాలము $t_0$ ($t_0 < t_1$) లో అది ఉన్న స్థితితో ప్రమేయం లేకుండా భావికాలము $t_2$ ($t_0 < t_1 < t_2$) లో అది ఉండబోవు స్థితిని గురించి ఉద్పాదించడమే ఈ విశ్లేషణా పద్ధతి.

సంభావ్యతా న్యాయాలను అనుసరించే భౌతిక వ్యవస్థలకు పై విశ్లేషణా పద్ధతిని అన్వయించడం ఎట్లా అంటే: భావికాలము $t_2$ లో భౌతిక వ్యవస్థ ఒక నిర్ణీత స్థితిలో ఉండ డానికిగల సంభావ్యత, $t_2$ కంటే పూర్వపు సమయము $t_1$ ($< t_2$) లో ఉన్న స్థితి మీద మాత్రమే ఆధారపడుతుందేగాని, అంతకుముందు సమయము $t_0$ ($< t_1$) లో ఉన్న స్థితిపై ఆధారపడదు. ఈ నియమాన్ని అనుసరించే భౌతిక వ్యవస్థల గురించి పరిశీలించిన తరవాత ఆ పరిశీలనకు చెందిన నమూనాలకు అన్వయించే యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియలను మార్కోవ్ ప్రక్రియలుగా పిలుస్తాము.

ఈ ప్రక్రియలను గురించి ఈ అధ్యాయంలో నేర్చుకొంటాము.

## 2.1 మార్కోవ్ ప్రక్రియ - దాని నిర్వచనము

విచ్ఛిన్న లేదా అవిచ్ఛిన్న పరామితి సమితి T గాగల యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ $\{X_t, t \varepsilon T\}$, $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$ లేదా $\{t \;\; t \geq 0\}$ కింది నియమాన్ని అనుసరిస్తే ఆ ప్రక్రియను మార్కోవ్ ప్రక్రియగా పిలుస్తాము ప్రతి పూర్ణాంకము n కు $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1}$ అయ్యేటట్లు T లోని $n+1$ పరామితి విలువలు $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ లకునూ, ప్రతీ వాస్తవ విలువలు $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ లకునూ సంబంధించి,

$$P(X_{t_{n+1}} \leq x_{n+1} \; X_{t_1} = x_1, \; \ldots, X_{t_n} = x_n)$$

$$= P(X_{t_{n+1}} \leq x_{n+1} \; X_{t_n} = x_n) \qquad \ldots 2.1.1$$

అవవలె. $t_n$ సమయానికి ప్రక్రియ స్థితి విలువ $x_n$ తెలిస్తే, $t_{n+1}$ సమయానికి $X_{t_{n+1}} \leq x_{n+1}$ సంభవించడానికి $t_1, t_2, \ldots, t_n$ సమయాల వద్ద ఉండే ప్రక్రియ స్థితులతో ప్రమేయం లేదు. సూక్ష్మంగా వివరించవలెనంటే, ప్రక్రియయొక్క వర్తమాన $(t_n)$ స్థితి విలువ $(x_n)$ తెలిస్తే, భావికాలం $(t_{n+1})$ వద్ద ఒక స్థితి $(x_{n+1})$ లో ఉండడానికి గల సంభావ్యత, భూతకాలము $t_m$ $(m < n)$ వద్ద ప్రక్రియ ఉన్న స్థితి $(x_m)$ విలువలపై ఆధారపడదు. (2.1.1) ని మార్కోవ్ నియమము (Markov Condition) లేదా మార్కోవ్ ధర్మమని వాడుక భాషలో పిలుస్తాము.

షరతు విభాజన ప్రమేయము (Conditional distribution function)

$$F(t_1, x\,;\, t_2, y) = P(X_{t_2} \leq y \; X_{t_1} = x) \qquad (t_1 < t_2)$$

గా నిర్వచిస్తే, (2.1.1)

$$F(t_n, x_n\,;\, t_{n+1}, x_{n+1}) = P(X_{t_{n+1}} \leq x_{n+1} \; X_{t_n} = x_n) \qquad \ldots(2.1.2)$$

అవుతుంది. ఈ ప్రమేయము ప్రతీ $t < t_n$ కు సంబంధించిన $X_t$ ల స్థితి విలువలు $x_t$ లపై ఆధారపడదు. కొన్ని పరిస్థితులలో ఈ ప్రమేయము భావి, వర్తమాన కాలాంతరము $t_{n+1} - t_n$ పైన మాత్రమే ఆధారపడి ఉంటుంది.

*నిర్వచనము 2.1.1 :* ఏ మార్కోవ్ ప్రక్రియకు సంబంధించిన షరతు విభాజన ప్రమేయము స్థితి విలువలు కాకుండా కాలాంతరము $t = t_2 - t_1$ $(t_1 < t_2)$ మీద ఆధారపడి ఉంటుందో; అంటే

$$F(t_1, x\,;\, t_2\; y) = F(t, x, y) \qquad \ldots 2.1.3$$

అయినప్పుడు, ఆ మార్కోవ్ ప్రక్రియను సజాతీయ (homogeneous) మార్కోవ్ ప్రక్రియ అని అంటారు. షరతు సంభావ్యతలలో

$$P(X_{t_2} \leq y \; X_{t_1} = x) = P(X_t \leq y \; X_0 = x) \qquad \ldots 2.1.4$$

అవుతుంది.

## 2.2 మార్కోవ్ ప్రక్రియలు - వాటి వర్గీకరణము

యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియలను సూచిక సమితి, స్థితి ఆవరణాల లక్షణాల దృష్ట్యా నాలుగు రకాలుగా వర్గీకరించినట్లే మార్కోవ్ ప్రక్రియలను కూడా 20 వ పుటలోని పట్టికలో పేర్కొన్నట్లు, నాలుగు రకాలుగా వర్గీకరించవచ్చు.

మార్కోవ్ ప్రక్రియల వర్గీకరణ పట్టిక 2.2

స్థితి ఆవరణము

| పరామితి ఆవరణము | *విచ్ఛిన్న $S: \{0, 1, 2, \ldots\}$ $: \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ | అవిచ్ఛిన్న $S: \{x \; -\infty < x < \infty\}$ |
|---|---|---|
| విచ్ఛిన్న $T: \{0, 1, 2, \ldots\}$ | విచ్ఛిన్న పరామితి మార్కోవ్ శృంఖలము | విచ్ఛిన్న పరామితి మార్కోవ్ ప్రక్రియ |
| అవిచ్ఛిన్న $T: \{t \; t \in R\}$ | అవిచ్ఛిన్న పరామితి మార్కోవ్ శృంఖలము | అవిచ్ఛిన్న పరామితి మార్కోవ్ ప్రక్రియ |

పై వర్గీకరణాన్ని బట్టి విచ్ఛిన్న స్థితి ఆవరణంగల మార్కోవ్ ప్రక్రియను మార్కోవ్ శృంఖలమని పిలుస్తాము. ఏదైనా ఒక భౌతిక వ్యవస్థను విచ్ఛిన్న సమయాల వద్ద పరిశీలించడం జరిగిందనుకోండి. ఈ పరిశీలనా విలువలు $X_0, X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}$ అనే యాదృచ్ఛిక సంఖ్యలతో సూచిస్తూ, n వ సమయంవద్ద పరిశీలించిన యాదృచ్ఛిక సంఖ్యను $X_n$ అనుకొంటే, $X_n$ లు యాదృచ్ఛిక చలరాశులు. $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ. ఇందులోని ప్రతీ $X_n$ విచ్ఛిన్న చలరాశి అయి, $n_0 < n_1 < \ldots < n_m$ అయ్యేటట్లు, $n_1, \ldots, n_m$ అనే m పూర్ణ సంఖ్యలకునూ, $x_1, \ldots, x_m$ అనే m వాస్తవ విలువలకునూ సంబంధించి కింది మార్కోవ్ నియమం నిజమయితే,

$$P(X_{n_m} = x_m \mid X_{n_0} = x_0, X_{n_1} = x_1, \ldots, X_{n_{m-1}} = x_{m-1})$$
$$= P(X_{n_m} = x_m \mid X_{n_{m-1}} = x_{m-1}) \qquad \ldots 2.2.1$$

లేదా ప్రత్యేకించి,

$$P(X_m = x_m \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{m-1} = x_{m-1})$$
$$= P(X_m = x_m \mid X_{m-1} = x_{m-1}) \qquad \ldots 2.2.2$$

$\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ ను మార్కోవ్ శృంఖలమని అంటారు (2.2.2) నియమం పర్యవసానంగా కింది ఫలితాలను సులభంగా నిరూపించవచ్చు.

$\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ ప్రక్రియ (2.2.2) వ నియమాన్ని సంతోషపరిస్తే,

---

*మార్కోవ్ ప్రక్రియలోని $X_t$ లు విచ్ఛిన్న చలరాశులై గణనీయ అనంతంగా స్థితివిలువలను స్వీకరిస్తే, అంటే S విచ్ఛిన్నమైతే, స్థితి విలువలను పూర్ణాంకాలతో సూచించడం పరిపాటి. $X_t = i$, $i = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ అయితే ప్రక్రియ t సమయం వద్ద i వ స్థితిలో ఉందనడం ఆచారము.

(a) $P(X_n = x_n \mid X_k = x_k \,;\, k = 1, 2, \ldots, n-1)$

$$= P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1})$$

(b) $P(X_n = x_n \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k \,;\, k < n)$

$$= P(X_n = x_n \mid X_k = x_k) \quad (k < n).$$

(c) $P(X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n \mid X_k = x_k \,;\, k = 0, 1, \ldots, n-1)$

$$= P(X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1})$$

(d) $P(X_{n+1} = x_{n+1}, X_{n-1} = x_{n-1} \mid X_n = x_n)$

$$= P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n) \cdot P(X_{n-1} = x_{n-1} \mid X_n = x_n)$$

అంటే, ప్రక్రియ యొక్క వర్తమాన స్థితి $(x_n)$ సమాచారం తెలిస్తే, దాని భావి, భూతకాలపు స్థితులు పరస్పరం స్వతంత్రాలు.

S విచ్ఛిన్నమైనప్పుడు స్థితివిలువలను పూర్ణాంకాలతో సూచించడం ఆచారం కాబట్టి (2.2.2) లోని x-విలువలను i ( = 0, 1, 2, ... ) లతో సూచిస్తే, పై మార్కోవ్ నియమము

$$P(X_m = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{m-2} = i_{m-2}, X_{m-1} = i)$$
$$= P(X_m = j \mid X_{m-1} = i) \qquad \ldots 2.2.3$$

ఇక్కడ $i_0, i_1, \ldots, i_{m-2}, i, j$ లు అన్నీ ధన పూర్ణాంకాలు. గణిత సౌలభ్యంకోసం ఈ అధ్యాయంలో ప్రక్రియా సిద్ధాంతాన్ని ముందు మార్కోవ్ శృంఖలాలకు వృద్ధిచేసి దానిని మార్కోవ్ ప్రక్రియలకు సార్వత్రీకరణం చేద్దాము.

## 2.3 సంక్రమ సంభావ్యతా ప్రమేయాలు

(Transition Probability functions)

మార్కోవ్ శృంఖలము n - వ మెట్టు (step) లో j వ స్థితిలో ఉండే సంభావ్యతను $p_j^{(n)}$ తో సూచిస్తే,

$$p_j^{(n)} = P(X_n = j)$$

దీనిని మార్కోవ్ శృంఖలం యొక్క n - వ మెట్టు పరమ (absolute) సంభావ్యత అనీ,

$$p^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \ldots, p_j^{(n)}, \ldots) \text{ ను}$$

n వ మెట్టు వద్ద మర్కోవ్ శృంఖలం యొక్క ఉపాంత విభాజన మాత్రిక (marginal

distribution matrix) అని అంటాము. ప్రతీ స్థితి $i \varepsilon S$ కు $P(X_n = i) > 0$ అయితే షరతు సంభావ్యతను

$$P(X_{m+n} = j \; X_m = i) = p_{ij}(m, m+n) \qquad 2.3.1$$

తో సూచిస్తే, $p_{ij}(m, m+n)$ ను మార్కోవ్ శృంఖలం యొక్క సంక్రమ సంభావ్యతా ప్రమేయమంటారు. m-వ మెట్టు వద్ద మార్కోవ్ శృంఖలం i వ స్థితిలో ఉందని తెలిస్తే: n మెట్లలో అంటే m + n-వ మెట్టువద్ద j వ స్థితికి సంక్రమించే (transit) సంభావ్యతను (2.8) తెలుపుతుందన్నమాట. ఇది n మెట్ల తరవాత i స్థితి నుండి j - స్థితిని ఆక్రమించే సంభావ్యతను సూచిస్తుంది. (2.8) లోని ప్రమేయము మామూలుగా సంక్రమణ (transition) లోని ఆది (initial) స్థితి i, అంత్య (final) స్థితి j లపైనే కాకుండా సంక్రమణ ఆరంభ సమయము m పై కూడా ఆధారపడి ఉంటుంది. కొన్ని మార్కోవ్ శృంఖలాలలో ఈ ప్రమేయము సంక్రమణ ఆరంభ సమయము m పై కాక, సంక్రమణ కాలాంతరము (m + n − m = n) పైనే ఆధారపడి ఉంటుంది. అంటే,

$$p_{ij}(m, m+n) = p_{ij}^{(m+n-m)} = p_{ij}^{(n)} \qquad \ldots 2.3.2$$

ప్రతి i, j ε S లకు, ఏ మార్కోవ్ శృంఖలానికి (2.3.2) నిజమవుతుందో, ఆ శృంఖలాన్ని సజాతీయ మార్కోవ్ శృంఖలము (homogeneous markov chain) అనీ, $p_{ij}^{(n)}$ లను సజాతీయ లేదా స్థావర సంక్రమ సంభావ్యతలు (stationary transition probabilities) అనీ అంటారు.

మనం పరిశీలించే మార్కోవ్ శృంఖలాలు చాలావరకు సజాతీయాలు కాబట్టి ఈ అధ్యాయంలో వాటిని గురించే సమగ్రంగా చర్చిస్తాము. సజాతీయ మార్కోవ్ శృంఖలాలలో ప్రతీ n, ధన పూర్ణాంకానికి

$$P(X_{m+n} = j \; X_m = i) = p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \; X_0 = i)$$

అవుతుంది. ప్రత్యేకంగా n = 1 అయినప్పుడు $p_{ij} = p_{ij}^{(1)}$ వ్రాసి, $p_{ij}$ ని 1వ మెట్టు సంక్రమ సంభావ్యత (one step transition probability) అనీ, $p_{ij}^{(n)}$ ని n-వ మెట్టు సంక్రమ సంభావ్యత అని కూడా అంటాము.

ఇదేవిధంగా అవిచ్ఛిన్న పరామితి మార్కోవ్ శృంఖలము $\{X_t, t \geq 0\}$ కు సంబంధించిన సంక్రమ సంభావ్యతా ప్రమేయాలను నిర్వచిస్తాము. ప్రతీ $t \geq 0$ కు, t సమయాన మార్కోవ్ శృంఖలం j - స్థితిలో ఉండే పరమ సంభావ్యత $p_j^{(t)} = P(X_t = j)$ గాను, s (≥ 0) సమయాన i స్థితినుంచి t (> s) సమయానికి మార్కోవ్ శృంఖలము j-స్థితిని ప్రవేశించు సంక్రమ సంభావ్యత

$$p_{ij}(s, t) = P(X_t = j \; X_s = i)$$

గాను, $\{X_t, t \geq 0\}$ సజాతీయ మార్కోవ్ శృంఖలమయితే, ప్రతీ $s \geq 0$ కు,

$$P\left(X_{s+t} = j \mid X_s = i\right) = p_{ij}^{(t)} = P\left(X_t = j \mid X_0 = i\right)$$

గా వ్రాస్తాము.

## సంక్రమ సంభావ్యతా మాత్రిక (Transition Probability matrix) :

విచ్ఛిన్న పరామితి మార్కోవ్ శృంఖలానికి సంబంధించిన 1-మెట్టు సంక్రమ సంభావ్యతలను మాత్రికా రూపంలో వ్రాయడం ఆచారము. దీనిని $P = (p_{ij})$, $i, j = 0, 1, 2, \ldots$ తో సూచిస్తే,

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0j} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & & \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix} \qquad \ldots 2.3.4$$

ఈ అనంత చతురస్ర మాత్రిక $P$ని మార్కోవ్ లేదా 1-మెట్టు సంక్రమ సంభావ్యతా మాత్రిక (1-step transition probability matrix) అని అంటారు. దీని మూలకాలు (elements) $p_{ij}$ కింది నిబంధనలను తృప్తిపరుస్తాయి.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{(i)} & p_{ij} \geq 0 & \forall i, j \in S \\ \text{(ii)} & \sum_{j \in S} p_{ij} = 1 & \forall i \in S \end{array}\right\} \qquad \ldots 2.3.5$$

అంటే, $P$ లోని ప్రతీ పంక్తి (row) లోని మూలకాల మొత్తం ఒకటికి సమానము.

ఇదే విధంగా n - మెట్టు సంక్రమ సంభావ్యతలను మాత్రికా రూపంలో వ్రాయవచ్చు. దీనిని $P^{(n)} = \left(p_{ij}^{(n)}\right)$ $i, j = 0, 1, 2, \ldots$ తో సూచిస్తే,

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & p_{02}^{(n)} & \cdots & p_{0j}^{(n)} & \cdots \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & \cdots & p_{ij}^{(n)} & \cdots \\ p_{20}^{(n)} & p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & \cdots & p_{2j}^{(n)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ p_{i0}^{(n)} & p_{i1}^{(n)} & p_{i2}^{(n)} & \cdots & p_{ij}^{(n)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix} \qquad \ldots 2.3.6$$

దీనిని n - మెట్టు సంక్రమ సంభావ్యతా మాత్రిక (n - step transition probability

matrix) అంటూ, దీని మూలకాలు $p_{ij}^{(n)}$ కింది నిబంధనలను తృప్తిపరుస్తాయని గ్రహించవచ్చు :

$$\left.\begin{array}{lll} \text{(i)} & p_{ij}^{(n)} \geq 0 & \forall i, j \varepsilon S \\ \text{ii)} & \sum\limits_{j \varepsilon S} p_{ij}^{(n)} = 1 & \forall i \varepsilon S \end{array}\right\} \quad \ldots 2.3\,7$$

ఇప్పుడు P, $p^{(n)}$, $P^{(n)}$ మాత్రికల మధ్యగల సంబంధాలను పరిశీలిద్దాము. ముందు వివిధ మెట్ల సంక్రమ సంభావ్యతా ప్రమేయాల మధ్యగల ప్రాథమిక సంబంధాన్ని నెలకొల్పుదాము. ప్రతి పూర్ణాంకాలు n, m > 0, ప్రతి i, j ε S లకు సంబంధించి

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \varepsilon S} p_{ik}^{(n)} \cdot p_{kj}^{(m)} \quad \ldots 2.3.8$$

(2.3.8) ని చాప్‌మెన్ - కొల్మొగ్రోవ్ (chapman - kolmogorov) సమీకరణమంటారు. దీనిని నిరూపించడానికి, నిర్వచనం ప్రకారము

$$p_{ij}^{(n+m)} = P\left(X_{n+m} = j \quad X_0 = i\right)$$

$$= \sum_{k \varepsilon S} P\left(X_{n+m} = j, X_n = k, X_0 = i\right) \div P\left(X_0 = i\right)$$

$$= \sum_{k \varepsilon S} \left\{P\left(X_{n+m} = j \quad X_n = k, X_0 = i\right)\right.$$

$$\left. . P\left(X_n = k, X_0 = i\right\} \div P\left(X_0 = i\right)$$

కాని మార్కోవ్ నియమము (2.1.1) పర్యవసానంగా

$$P\left(X_{n+m} = j \quad X_n = k, X_0 = i\right) = P\left(X_{n+m} = j \quad X_n = k\right)$$

$$= p_{kj}^{(m)}$$

$$P\left(X_n = k, X_0 = i\right) \div P\left(X_0 = i\right) = P\left(X_n = k \quad X_0 = i\right) = p_{ik}^{(n)}$$

వీటిని పై సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించి చూస్తే (2.3.8) వస్తుంది. ప్రత్యేకించి, ఏదైనా పూర్ణాంకాలు n, r (n ≥ r > 0), ప్రతి i, j ε S లకు సంబంధించి,

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \varepsilon S} p_{ik}^{(r)} p_{kj}^{(n-r)} \quad \ldots 2.3.9$$

ఇక్కడ
$$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = 1, \quad i = j$$
$$= 0, \quad i \neq j.$$

ఇదేవిధంగా వైజాతీయ (non-homogeneous) మార్కోవ్ శృంఖలాలలో సంక్రమ సంభావ్యతా ప్రమేయాల మధ్య చాప్‌మెన్-కొల్మొగ్రోవ్ సమీకరణాన్ని నెలకొల్పగా, ప్రతి $i, j \in S$ లకు, ప్రతీ పూర్ణాంకాలు $r, n, m$ $(0 < r < n < m)$ లకు సంబంధించి,

$$p_{ij}(r, m) = \sum_{k \in S} p_{ik}(r, n) \cdot p_{kj}(n, m) \qquad \ldots 2.3.10$$

అవుతుంది.

ఇప్పుడు $P$, $P^{(n)}$ మాత్రికల మధ్యగల సంబంధాన్ని పరిశీలిద్దాము. $A = (a_{ik})$, $B = (b_{kj})$ లు వరసగా $p \times r$, $r \times q$ ఆర్డర్‌గల రెండు మాత్రికలనుకొంటే, వీటి లబ్ధ మాత్రిక $C = AB = (c_{ij})$. దీని ఆర్డరు $p \times q$. మాత్రికా సిద్ధాంతం ప్రకారము $C$లోని $i, j$ మూలకము $c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}$, అంటే $c_{ij}$, $A$ లోని $i$ వ పంక్తి, $B$ లోని $j$ వ దొంతు (column) ల లబ్ధానికి సమానము. ఈ విషయం దృష్ట్యా (2.3.9) ను పరిశీలిస్తే, $P^{(r)}$ లోని $i$ వ పంక్తి, $P^{(n-r)}$ లోని $j$ వ దొంతుల లబ్ధము $p_{ij}^{(n)}$ కు, అంటే ఆ లబ్ధము $P^{(n)}$ లోని $(i, j)$ మూలకానికి సమానమని గ్రహించవచ్చు. దీనినిబట్టి

$$P^{(n)} = P^{(r)} \cdot P^{(n-r)} \qquad \ldots 2.3.11$$

ప్రత్యేకంగా,

$$\begin{aligned} P^{(2)} &= P^{(1)} \cdot P^{(1)} = P^2 \qquad (\because P^{(1)} = P) \\ P^{(3)} &= P^{(2)} \cdot P^{(1)} = P^3 \\ &\vdots \\ P^{(n)} &= P^{(n-1)} \cdot P^{(1)} = P^n. \end{aligned} \qquad \ldots 2.3.12$$

(2.3.12) దృష్ట్యా $n$-మెట్టు సంక్రమ సంభావ్యతా మాత్రిక 1 – మెట్టు సంక్రమ సంభావ్యతా మాత్రిక యొక్క $n$ వ ఘాతానికి సమానము. అందుచేత మార్కోవ్ శృంఖలానికి సంబంధించిన $P$ తెలిస్తే (2 3 12) ఆధారంగా దాని $P^{(n)}$ లేదా $n$-మెట్టు సంక్రమ సంభావ్యతలను కనుక్కోవచ్చు.

ఇట్లే $P^{(n)}$, $P$ మాత్రికల మధ్యగల సంబంధాన్ని పరిశీలిద్దాము. నిర్వచనం ప్రకారం $n$ సమయాన మార్కోవ్ శృంఖలం ఉపాంత సంభావ్యతలు

$$\begin{aligned} p_j^{(n)} = P(X_n = j) &= \sum_{i \in S} P(X_n = j, X_0 = i) \\ &= \sum_{i \in S} P(X_0 = i) \cdot P(X_n = j \mid X_0 = i) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i \varepsilon S} p_i^{(0)} \cdot p_{ij}^{(n)}$$

అంటే, $p^{(n)}$ లోని j వ మూలకము $p_j^{(n)}$, పంక్తి మాత్రిక $P^{(0)}$, $P^{(n)}$ లోని j వ దొంతుల లబ్ధానికి సమానము.

$$\therefore \quad p^{(n)} = p^{(0)} P^{(n)} = p^{(0)} P^n \qquad \ldots \quad 2.3.13$$

ఇక్కడ $X_n$ యొక్క ఉపాంత విభాజన మాత్రిక $p^{(n)}$ కాబట్టి (2.3.13) ఆధారంగా, $X_0$ యొక్క ఉపాంత విభాజనము $p^{(0)}$, P మాత్రిక తెలిస్తే, మార్కోవ్ శృంఖలంలోని ఏ యాదృచ్ఛిక చలరాశి $X_n$ $(n > 0)$ యొక్క ఉపాంత విభాజనాన్ని నిర్ణయించవచ్చు. అంటే, శృంఖలం ఆది విభాజనము (initial distribution), P లతో పరమ సంభావ్యతలు $p_j^{(n)}$ $n > 0)$ ను కనుక్కోగలము.

ఉదాహరణకు స్థితి అవరణము $S = (0,1)$గా గల మార్కోవ్ శృంఖలంయొక్క 1-మెట్టు సంక్రమ సంభావ్యతా మాత్రిక

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}, \; 0 \leq a, b \leq 1, \quad 1-a-b < 1 \qquad \ldots 2.3.14$$

అయితే, n-మెట్టు సంక్రమ సంభావ్యతా మాత్రిక $P^{(n)}$ ను కనుక్కోవడం పరిశీలిద్దాము.

(2.3.14) నుంచి

$$p_{00}^{(1)} = p_{00} = 1 - a, \quad p_{01}^{(1)} = p_{01} = a$$

$$p_{10}^{(1)} = p_{10} = b \quad , \quad p_{11}^{(1)} = p_{11} = 1 - b.$$

2.3.9 దృష్ట్యా,

$$p_{00}^{(n)} = p_{00}^{(n-1)} p_{00}^{(1)} + p_{01}^{(n-1)} p_{10}^{(1)}$$

$$= (1-a) p_{00}^{(n-1)} + b\, p_{01}^{(n-1)}$$

$$= (1-a) p_{00}^{(n-1)} + b \left(1 - p_{00}^{(n-1)}\right)$$

$$= b + (1-a-b)\, p_{00}^{(n-1)} \qquad (n > 1)$$

ఈ ఆవృత్తి సంబంధాన్ని ఉపయోగించి వరసగా వ్రాస్తే,

$$p_{00}^{(2)} = b + (1-a)(1-a-b) \qquad (\because \; p_{00}^{(1)} = 1-a)$$

$$p_{00}^{(3)} = b + b(1-a-b) + (1-a)(1-a-b)^2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$p_{00}^{(n)} = b + b(1-a-b) + \ldots + b(1-a-b)^{n-2} + (1-a)(1-a-b)^{n-1}$$

$$= b\sum_{r=0}^{n-2}(1-a-b)^r + (1-a)(1-a-b)^{n-1}$$

$1 - a - b < 1$ అయినప్పుడు,

$$p_{00}^{(n)} = b\,\frac{1-(1-a-b)^{n-1}}{1-(1-a-b)} + (1-a)(1-a-b)^{n-1}$$

$$= \frac{b}{a+b} + \frac{(1-a-b)^{n-1}\left[(1-a)(a+b)-b\right]}{a+b}$$

$$= \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}(1-a-b)^n.$$

ఇదేవిధంగా $p_{10}^{(n)}$ కు కూడా ఆవృత్తి సంబంధాన్ని నెలకొల్పితే,

$$p_{10}^{(n)} = (1-a)\,p_{10}^{(n-1)} + b\,p_{11}^{(n-1)}$$

$$= b + (1-a-b)\,p_{10}^{(n-1)}$$

దీనిని బట్టి $p_{10}^{(n)}$ నిర్ణయించండి. చివరకు

$$p_{00}^{(n)} + p_{01}^{(n)} = 1, \quad p_{10}^{(n)} + p_{11}^{(n)} = 1$$

ల దృష్ట్యా $P^{(n)}$ లోని మిగిలిన రెండు మూలకాలు $p_{01}^{(n)}$, $p_{11}^{(n)}$ ను కూడా కనుక్కొంటె,

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}(1-a-b)^n & \frac{a}{a+b} - \frac{a}{a+b}(1-a-b)^n \\ \frac{b}{a+b} - \frac{b}{a+b}(1-a-b)^n & \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}(1-a-b)^n \end{pmatrix} \quad \ldots 2.3.15$$

*గమనిక :* $1-a-b < 1$ కాబట్టి $n \longrightarrow \infty$ అయితే $(1-a-b)^n \longrightarrow 0.$

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}}\ P^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix} \quad \text{అవుతుంది.} \qquad \ldots 2.3.16$$

## 2.4. మార్కోవ్ శృంఖలంయొక్క సంభావ్యతా విభాజనాన్ని వర్ణించడం

ఏ ప్రక్రియనైనా సంపూర్ణంగా విశ్లేషించవలెనంటే, దానిలోని ఏ n యాదృచ్ఛిక చలరాశులదైనా సంయుక్త విభాజనాన్ని సమగ్రంగా పరిశీలిస్తే చాలని అనుకొన్నాము గదా! మార్కోవ్ శృంఖలపు గమనాన్ని వర్ణించడానికి దీనిలోని $n\ (< \infty)$ విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశుల సంయుక్త విభాజనాన్ని ముందు కనుక్కోవలె. దీన్ని నిర్ణయించడానికి మార్కోవ్ శృంఖలం యొక్క ఆది విభాజనము $p^{(0)}$, $P$ మాత్రిక అవసరమని నిరూపిద్దాము. దీనిని రెండు దశలలో చూపుదాము.

*మొదటి దశ :* మార్కోవ్ శృంఖలం $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ లోని $X_0, X_1, \ldots, X_n$ ల సంయుక్త విభాజనాన్ని $p^{(0)}$, $P$ ల ఆధారంగా నిర్ణయించే విధానాన్ని తెలుసుకొందాము.

ప్రతీ ధన పూర్ణాంకాల సమితి $(i_0, i_1, \ldots, i_n)$ కు సంబంధించి $X_0, X_1, \ldots, X_n$ ల సంయుక్త సంభావ్యతా విభాజనము

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n)$$
$$= P(X_n = i_n \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1})$$
$$\cdot P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1})$$

2.1.1 నియమం ప్రకారం

$$P(X_n = i_n \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1})$$
$$= P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}) = p_{i_{n-1} i_n}$$
$$\therefore\ P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n)$$
$$= P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}) \cdot p_{i_{n-1} i_n} \qquad \ldots 2.4.1$$

(2.4.1) ని గణితానుగమన రీతిలో వ్రాస్తే,

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n)$$

$$= P(X_0 = i_0) \cdot p_{i_0 i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n} \qquad \ldots \quad 2.4.2$$

(2.4.2) లోని కుడివైపు లబ్ధంలోని కారకాలు 1-మెట్టు సంక్రమ సంభావ్యతలు కాబట్టి మార్కోవ్ శృంఖలంయొక్క సంక్రమ సంభావ్యతా మాత్రిక P, $X_0$ యొక్క ఉపాంత సంభావ్యతలు $P(X_0 = i_0)$ తెలిస్తే $X_0, X_1, \ldots, X_n$ ల సంయుక్త విభాజనాన్ని కనుక్కోవచ్చు.

*రెండవ దశ :* మార్కోవ్ శృంఖలము $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ లోని ఏవైనా **k** $(< \infty)$ యాదృచ్ఛిక చరరాశుల సంయుక్త విభాజనాన్ని కనుక్కొందాము. $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ అయ్యేటట్లు $n_1, \ldots, n_k$ లు k ధన పూర్ణాంకాలు, ప్రతి ధన పూర్ణాంకాల సమితి $\{i_1, \ldots, i_k\}$ కి సంబంధించి, $X_{n_1}, \ldots, X_{n_k}$ ల సంయుక్త విభాజనము :

$$P(X_{n_1} = i_1, X_{n_2} = i_2, \ldots, X_{n_{k-1}} = i_{k-1}, X_{n_k} = i_k)$$

$$= P(X_{n_1} = i_1, X_{n_2} = i_2, \ldots, X_{n_{k-1}} = i_{k-1}) \cdot$$

$$\times P(X_{n_k} = i_k \mid X_{n_1} = i_1, X_{n_2} = i_2, \ldots, X_{n_{k-1}} = i_{k-1})$$

2.1.1 నియమం పర్యవసానంగా

$$P(X_{n_k} = i_k \mid X_{n_1} = i_1, X_{n_2} = i_2, \ldots, X_{n_{k-1}} = i_{k-1})$$

$$= P(X_{n_k} = i_k \mid X_{n_{k-1}} = i_{k-1}) = p_{i_{k-1} i_k}$$

$$\therefore \; P(X_{n_1} = i_1, X_{n_2} = i_2, \ldots, X_{n_{k-1}} = i_{k-1}, X_{n_k} = i_k)$$

$$= P(X_{n_1} = i_1, X_{n_2} = i_2, \ldots, X_{n_{k-1}} = i_{k-1}) \cdot p_{i_{k-1} i_k} \qquad \ldots 2.4.3$$

2.4.3 ని గణితానుగమన రీతిగా వ్రాస్తే, సంయుక్త విభాజనము

$$P(X_{n_1} = i_1, X_{n_2} = i_2, \ldots, X_{n_{k-1}} = i_{k-1}, X_{n_k} = i_k)$$

$$= P(X_{n_1} = i_1) \cdot p_{i_1 i_2} \, p_{i_2 i_3} \cdot p_{i_3 i_4} \cdots p_{i_{k-1} i_k} \qquad \ldots 2.4.4$$

అవుతుంది. (2.4.4) లో కుడివైపు లబ్ధంలోని కారకాలన్నీ అనేక మెట్ల సంక్రమ సంభావ్యతా

ప్రమేయాలకు చెందినవే. మార్కోవ్ శృంఖలంయొక్క P మాత్రిక తెలిస్తే, ఈ ప్రమేయాలను (2.3.12) ద్వారా కనుక్కోవచ్చు. ఇదేవిధంగా (2.3.13) ద్వారా $p^{(0)}$, P మాత్రికలు తెలిస్తే ఉపాంత సంభావ్యత $P(X_{n_1} = i_1)$ ను నిర్ణయిస్తాము. కాబట్టి మార్కోవ్ శృంఖలం యొక్క P మాత్రిక, దాని ఆది విభాజనము $p^{(0)}$ తెలిస్తే, శృంఖలంలోని ఏవైనా k యాదృచ్ఛిక చలరాశుల సంయుక్త విభాజనాన్ని నిర్ణయించి, దాని గమనాన్ని పరిశీలించ వీలగును.

పై సిద్ధాంతం దృష్ట్యా మార్కోవ్ శృంఖలాన్ని సంపూర్ణంగా విశ్లేషించవలెనంటే దానికి సంబంధించిన P మాత్రికతోపాటు, ఆది ఉపాంత విభాజనము $p^{(0)}$ కు చెందిన సమాచారం కూడ తెలిసి ఉండవలె.

## 2.5 మార్కోవ్ శృంఖలాలకు కొన్ని ఉదాహరణలు

సామాన్య భౌతిక, జీవ, ఆర్థిక దృగ్విషయాలను మార్కోవ్ శృంఖల నమూనాల ద్వారా వర్ణించడం వల్ల పై సిద్ధాంతానికి ప్రాముఖ్యత పెరిగింది. ఈ శాస్త్రీయ రంగాలలో మార్కోవ్ శృంఖలాల అనువర్తనీయ పరిస్థితులను కొన్నిటిని పరిశీలిద్దాము.

*2.5.1 స్వతంత్ర సమ విభాజనంగల యాదృచ్ఛిక చలరాశుల సంకలనాన్ని మార్కోవ్ శృంఖలంగా చూపడం :* $\{X_n, n = 1, 2, 3, \ldots\}$ ను స్వతంత్ర సమ విభాజనంగాగల విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశుల అనుక్రమమనుకోండి. $X_n$ లు స్వీకరించే విలువలు $i = 0, 1, 2, \ldots$; వీటి సమ విభాజనము $P(X=i) = a_i$, $a_i \geq 0$, $\sum_i a_i = 1$ అనుకొందాము. $S_n = \sum_1^n X_r$ తో సూచిస్తే, $\{S_n, n = 1, 2, \ldots\}$ ప్రక్రియ మార్కోవ్ శృంఖలం అవుతుంది. ప్రతీ ధన పూర్ణాంకాల జత i, j కు

$$P(S_{n+1} = j \mid S_n = i) = P(X_{n+1} = j - i) = P(X = j - i)$$

ఈ సంక్రమ సంభావ్యత సంక్రమ సమయంపై ఆధారపడదు కాబట్టి

$$p_{ij} = P(X = j - i) = a_{j-i} \qquad \forall\, j \geq i$$
$$= 0 \qquad \forall\, j < i.$$

$\{S_n, n = 1, 2, \ldots\}$ సజాతీయ మార్కోవ్ శృంఖలం అవుతుంది. దీని మార్కోవ్ మాత్రిక

$$P = \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

X యొక్క సంభవ విలువలు అన్ని పూర్ణాంకాలు అయితే. $S_n$, స్వీకరించే విలువలుకూడా అన్ని పూర్ణాంకాలు అవుతాయి కాబట్టి $\{S_n, n = 1, 2, \ldots\}$ యొక్క స్థితి ఆవరణము $S = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. $X_n$ ల సమవిభాజనము $P\{X = i\} = a_i$, $i = 0, \pm 1, \ldots;\ a_i \geq 0, \sum_i a_i = 1$. దీని సంక్రమ సంభావ్యతా మాత్రిక

$$P = \begin{matrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ \cdots & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdots \\ \cdots & a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

*2.5.2 సరళరేఖమీద 'యాదృచ్ఛిక నడక'* (random walk)* : యాదృచ్ఛిక నడకపై సమగ్ర చర్చను అవగాహన చేసికోడానికి, పరిశీలించే ఒక వ్యవస్థ స్థితులను చలించే అణువు (particle) స్థానాలతో పోల్చి ఊహిద్దాము. ఈ అణువు చలనాన్నే యాదృచ్ఛిక నడక అంటూ, దీనిని మార్కోవ్ శృంఖలంతో రూపకల్పన చేయడానికి ప్రయత్నిద్దాము.

అణువు ఒక యూనిట్ దూరానికి (ఎడమ వైపునకు గాని, కుడివైపునకు గాని) దూకుతూ (jumping) ఒకే సరళరేఖపై చలిస్తోందని అనుకొందాము. నడకను ప్రారంభించే టప్పటి దాని ఆది స్థానాన్ని $X_0$ తోను, n వ ప్లుతి (jump) లో చలించిన దూరము $X_n$ తోను సూచిస్తే $X_n$ లు స్వతంత్ర సమ విభాజనంగాగల విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశులు అవుతాయి. n– ప్లుతుల అనంతరం అణువు చలించిన మొత్తం దూరాన్ని $S_n$ తో సూచిస్తే, $S_n = X_0 + X_1 + \ldots + X_n$. $\{S_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ ప్రక్రియ విభిన్న స్థితి ఆవరణంగల మార్కోవ్ శృంఖలమవుతుంది. కొన్ని ప్లుతుల అనంతరం అణువు i వ స్థితిలో ఉండి, తరవాత ప్లుతిలో (i + 1) వ స్థితిని గాని, (i — 1) వ స్థితిని గాని చేరడానికి సంభావ్య

* ఇందు ఆసక్తిగల చదవరులు వివరాలకు *Random walk* by Spitzer (1964) ను సంప్రదించండి.

తలు p, q (p + q = 1 అయ్యేటట్లు) అయితే, ప్రతి పూర్ణాంకం $n > 0$ కు,

$$p_{i\,i+1} = P(S_{n+1} = i+1 \mid S_n = i) = p$$

$$p_{i\,i-1} = P(S_{n+1} = i-1 \mid S_n = i) = q$$

అంటే, $P(X_n = 1) = p$, $P(X_n = -1) = q$ అవుతాయి.

$X_n$ పై బెర్నౌలీ విభాజనాన్ని అనుసరించే యాదృచ్ఛిక చలరాశులు అయితే, $\{S_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ ను సాంప్రదాయక యాదృచ్ఛిక నడక (classical random walk) ను సూచించే సజాతీయ మార్కోవ్ శృంఖలమంటారు. దీని సంక్రమ సంభావ్యతా ప్రమేయము

$$\begin{aligned} p_{ij} &= p, & j &= i+1 \\ &= q, & j &= i-1 \\ &= 0, & |j-i| &> 1 \end{aligned}$$

అవుతుంది.

(A) నిర్బంధంలేమి యాదృచ్ఛిక నడక (unrestricted random walk):

ఒక సరళరేఖ మీద అణువు హద్దుల మధ్య కాకుండా ఇరువైపుల ఎన్ని యూనిట్ల దూరమైనా చలించగలిగితే, $\{S_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ అణువు యొక్క నిర్బంధంలేమి నడకను సూచిస్తుంది. దీని n — మెట్టు సంక్రమ సంభావ్యతా ప్రమేయము

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= P(S_n = j \mid S_0 = i) \\ &= P(X_1 + X_2 + \ldots + X_n = j - i) \end{aligned}$$

ప్రతి $n > 0$ కు,

$$P(X_n = +1) = p, \ P(X_n = -1) = q$$

కాబట్టి $p_{ij}^{(n)} = P$ (n ప్లుతులలో $j - i + \dfrac{n - |j-i|}{2}$ ప్లుతులు కుడివైపుకు,

$\dfrac{n - |j-i|}{2}$ ప్లుతులు ఎడమవైపుకు చలించడం)

n = సరిసంఖ్య అయినప్పుడు,

$$p_{ij}^{(n)} = \binom{n}{\frac{n+j-i}{2}} p^{(n+j-i)/2} q^{(n-j+i)/2}$$

n బేసిసంఖ్య అయినప్పుడు,

$$p_{ij}^{(n)} = 0 \text{ అవుతుంది.}$$

ప్రత్యేకించి n సరిసంఖ్య అయితే,

$$p_{00}^{(n)} = \binom{n}{n/2} (pq)^{n/2}$$

లేదా

$$p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} (pq)^{n}$$

స్టెర్లింగ్ (Sterling) ఉజ్జాయింపు ప్రకారం

$$p_{00}^{(2n)} \simeq \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} \qquad \dots \quad 2.5.1$$

(B) నిర్బంధకర యాదృచ్ఛిక నడక (resricted random walk)

పై విధంగా కాక రెండు హద్దుల మధ్యనే అణువు యాదృచ్ఛికంగా నడిస్తే దాని నడకను నిర్బంధకర యాదృచ్ఛిక నడక అంటారు. ఈ హద్దులు 0, a అనుకోండి. ఇక్కడ a ధనపూర్ణాంకము. అప్పుడు అణువు వివిధ ప్లుతులలో 0, 1, 2, ..., a స్థానాలలోకి ప్రవేశిస్తుంది. కాబట్టి ఈ స్థానాలు $\{S_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ కు సంభవ స్థితులు అవుతాయి. అందుచేత ఈ మార్కోవ్ శృంఖలం యొక్క స్థితి ఆవరణము

$S = \{0, 1, 2, \dots, a\}$ అవుతుంది.

అణువు 0 గాని, a స్థానాన్ని గాని చేరేంతవరకే యాదృచ్ఛికంగా నడుస్తుందని అనుకొందాము. ఈ హద్దుల దగ్గర దీని ప్రవర్తనలననుసరించి వివిధ మార్కోవ్ శృంఖలాలను చెప్పుకోవచ్చు.

(i) *రెండు విలీన హద్దులు (absorbing barriers) తో యాదృచ్ఛిక నడక :* అణువు 0, a ల మధ్య ప్లుతులలో చలిస్తూ, 0, a లలో ఏదైనా ఒక హద్దులో ప్రవేశించగానే ఇక కదలకుండా ఆ స్థానాన్నే అధిష్ఠించి ఉంటుందనుకొందాము. అంటే సంక్రమ సంభావ్యతలలో

$$p_{00} = 1, \ p_{aa} = 1,$$

$$p_{ii-1} = q, \ p_{ii+1} = p, \qquad (p + q = 1, \ 1 \le i \le a - 1)$$

అప్పుడు 0, a హద్దులను యాదృచ్ఛిక నడకకు విలీన హద్దులు (absorbing barriers

అంటారు. రెండు విలీన హద్దులు 0, a గా గల యాదృచ్ఛిక నడకను రూప కల్పన చేసే మార్కోవ్ శృంఖలం మార్కోవ్ మాత్రిక

$$P = \begin{array}{c|cccccccc} \text{అంత్య / ఆది స్థితి} & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & a-2 & a-1 & a \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & q & 0 & p & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \\ a-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q & 0 & p \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \ldots 2.5.2$$

జూదపు ఆటలో జూదరి సంపాదనను, పై యాదృచ్ఛిక నడక ద్వారా వర్ణించవచ్చు. A, B అనే ఇద్దరు జూదరులు వరసగా x, y మొత్తాలతో ఆట కుపక్రమించారను కొందాము. ఇద్దరి మొత్తము $x + y = a$ యూనిట్లు. ప్రతిసారి ఆటలో ఎవరో ఒకరికి గెలుపు తథ్యమనీ, ప్రతి గెలుపుకు ఒక యూనిట్ ధనాన్ని గెలిచిన వారికి ఓడినవారు ఇస్తారనీ అనుకొందాము. ఒక ఆటలో నెగ్గి (ఓడి), A ఒక యూనిట్ ధనాన్ని గెలుచు (పోగొట్టు) కోడానికి సంభావ్యతా p (q) అనుకొందాము. అంటే n వ ఆటలో A యొక్క సంపాదనను $X_n$ తో సూచిస్తే,

$$P(X_n = +1) = p, \; P(X_n = -1) = q, \; (p + q = 1)$$

$X_0 = x$ కాబట్టి n ఆటల అనంతరం A యొక్క ధనము $S_n = X_0 + X_1 + \ldots + X_n$ అవుతుంది. (అప్పుడు B యొక్క ధనము $a - S_n$ అవుతుంది). $S_n = 0$ అయినప్పుడు, ఆట ఆగిపోవడం, A 'నాశన' (ruin) మవడం; $S_n = a$ అయినప్పుడు, ఆట ఆగిపోవడం, B నాశనమవడం జరుగుతుంది. $\{S_n, n = 0, 1, \ldots\}$ ని 'జూదరి నాశన' (gambler's ruin) ప్రక్రియ అని పిలుస్తారు.

(ii) *రెండు మళ్ళగొట్టు హద్దులు* (reflecting barriers) *గల యాదృచ్ఛిక నడక* : అణువు 0, a హద్దుల మధ్య చలిస్తూ, "a − 1" స్థానం నుంచి 'a' హద్దును చేరగానే మళ్ళగొట్టబడి మళ్ళా "a − 1" ని ప్రవేశించడం గాని; లేదా "1" స్థానం నుంచి "0" హద్దును ప్రవేశించగానే మళ్ళీ తిరిగి "1" ని చేరడం తథ్యమయితే, 0, a హద్దులను

యాదృచ్ఛిక నడకకు రెండు మళ్ళి గొట్టు హద్దులు (reflecting bairrers) అంటారు. సంక్రమ సంభావ్యతలలో

$$p_{01} = 1, \ p_{aa-1} = 1$$

$$p_{ii+1} = p, \ p_{ii-1} = q, \qquad (p+q=1, \ 1 \leq i \leq a-1)$$

దీని సంక్రమ సంభావ్యతా మాత్రిక

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ a-1 \\ a \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & a-1 & a \end{array} \\ \left( \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array} \qquad \ldots 2.5.3$$

*2.5.3 విచ్ఛిన్న క్యూ (queue) నమూనా :* టిక్కెట్ కౌంటర్ల దగ్గర, ఆఫీసులలో విచారణ కౌంటర్ల దగ్గర, ఆటో మరమ్మత్తు షాపుల దగ్గర, టెలిగ్రాఫ్ ఆఫీసు కౌంటర్ల దగ్గర, బస్సుస్టాండు వద్ద సేవ (service) కోసం వరసలలో నిలబడి నిరీక్షిస్తున్న మనుషులనయితేనేమి, అనేక రకాలైన శకటాలనైతేనేమి మనం సాధారణంగా గమనిస్తాము. ఈ వరసలను మామూలుగా 'క్యూ' (queue) లు అంటాము. ఇక్కడ టిక్కెట్స్ ఇచ్చేవాళ్లు, విచారణ ఆఫీసర్లు, శకటాల మెకానిక్స్ వంటివారిని 'సేవకులు' (servers) అంటాము. మామూలుగా ఒక్కొక్క క్యూకు ఒకరుగాని, ఒకరికంటె ఎక్కువ సేవకులుగాని ఉండవచ్చు. బాంకుల వంటి సంస్థలలో ఒకేమాదిరి సేవకు రెండుగాని, ఎక్కువగాని సేవకులు, వారికి చెందిన క్యూలు ఏర్పడవచ్చు. అట్లాంటి క్యూలు 'ముందు వచ్చిన వారికి ముందు సేవ', 'ఆఖరున వచ్చినవారికి ముందు సేవ', 'ముఖ్యులైన వారికి ముందు సేవ' వంటి ఏదైనా సూత్రాన్ని పాటించవచ్చు. కాని ఒకే సేవకుడు, 'ముందువస్తే ముందు సేవ' అనే నియమాన్ని పాటించే అతనికి చెందిన ఒకే క్యూను మాత్రమే ఇక్కడ మనం పరిశీలిద్దాము. ప్రతి $n \geq 1$ కి సంబంధించి $n$ వ ఖాతాదారు (customer) కు సేవ జరిగేటప్పుడు, అంటే $n$ వ సేవా సమయంలో క్యూలో ప్రవేశించిన నూతన ఖాతాదారుల సంఖ్యను $U_n$ తో సూచిస్తే, $U_1, U_2, U_3, \ldots$ లు స్వతంత్ర సమవిభాజన యాదృచ్ఛిక చలరాశులు అవుతాయి. వీటి సమ విభాజనము

P (ఒకరి సేవాసమయంలో క్యూలో ప్రవేశించిన నూతన ఖాతాదార్ల సంఖ్య,

$U = k) = a_k$ ; $k = 0, 1, 2, \ldots$; $a_k \geq 0, \sum_0^{\infty} a_k = 1$ అనుకొందాము.

n వ ఖాతాదారుని సేవ పూర్తి అయ్యేటప్పుడు క్యూలో నిరీక్షిస్తున్నవారి సంఖ్య $X_n$ అయితే, $X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$ లు ఆయా సేవాసమయాలలో నిరీక్షిస్తున్న క్యూ పొడవులను సూచించే యాదృచ్ఛిక చలరాశులు. ఇప్పుడు $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ ప్రక్రియను పరిశీలిద్దాము. ఇక్కడ

$X_{n+1}$ = క్యూలో $(n+1)$ — వ ఖాతాదారునకు వెనకనున్నవారి సంఖ్య

+ అతని సేవాసమయంలో క్యూని ప్రవేశించిన నూతన ఖాతాదార్ల సంఖ్య

$= (X_n - 1) + U_{n+1}$

కాని $X_n = 0$ అయితే, $X_{n+1}$ $(n+1)$ సేవాసమయంలో వచ్చిన నూతన ఖాతాదార్ల సంఖ్య $U_{n+1}$ అవుతుంది కాబట్టి ఇట్లాంటి క్యూ నమూనాను కింది విధంగా వ్రాస్తాము.

$$X_{n+1} = X_n - \delta(X_n) + U_{n+1} \qquad \ldots 2.5.4$$

ఇక్కడ $\delta(x) = 1, \quad x \neq 0$

$= 0, \quad x = 0$

$U_{n+1}$ యాదృచ్ఛిక చలరాశి $X_1, X_2, \ldots, X_n$ లపై ఆధారపడదు. $X_n$ తెలిస్తే $X_{n+1}$ పరిశీలనకు $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ ల సమాచారంతో పనిలేదు. కాబట్టి $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ ప్రక్రియ మార్కోవ్ శృంఖల మవుతుంది. దీని సంక్రమ సంభావ్యతా ప్రమేయాన్ని కనుక్కొందాము.

$X_n = i > 0$ అయితే, ప్రతి $j > 0$ కు

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(U_{n+1} = j - i + 1) = a_{j-i+1}$$

$X_n = 0$ అయితే, ప్రతి $j \geq 0$ కు

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = 0) = P(U_{n+1} = j) = a_j$$

ఈ ప్రమేయాలు సంక్రమ సమయము n మీద ఆధారపడలేదు కాబట్టి $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ సజాతీయ మార్కోవ్ శృంఖలమని గమనిద్దాము. ఇక్కడ

$p_{0j} = a_j, \qquad j \geq 0$

$p_{ij} = a_{j-i+1}, \quad j > i > 0$

ఈ సజాతీయ మార్కోవ్ శృంఖలంయొక్క P మాత్రిక

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \qquad \ldots 2.5.5$$

అవుతుంది.

*2.5.4 విచ్ఛిన్న బ్రాంచింగ్* (branching) *ప్రక్రియ* : ఇప్పుడు పునరుత్పత్తి చేయగల జీవాణువుల సమూహాలను పరిశీలిద్దాము. ప్రారంభంలో సౌలభ్యం కోసం ఈ జీవాణువులకు ఒక దానితో మరొకటి ప్రమేయం లేకుండా వాటి జాతి వ్యాప్తికోసం పునరుత్పత్తి చేయగలవని ఊహిద్దాము. ఏదైనా ఒక జీవి తన జీవితకాలం (life time) లో యాదృచ్ఛిక సంఖ్యలో కొన్ని చిన్న జీవాణువులను (off-springs) పునరుత్పత్తి చేయవచ్చు కాబట్టి ఈ సంఖ్యను Z తో సూచిస్తూ, Z యొక్క సంభావ్యతా విభాజనము

P (ఒక జీవి k చిన్న జీవాణువులను పునరుత్పత్తి చేయడం)

$$= P(Z = k) = a_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots;\ a_k \geq 0,\ \sum_{0}^{\infty} a_k = 1$$

అని అనుకొందాము. దీని సంభావ్యతాజనక ప్రమేయము (probability generating function)* $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ అనుకొందాము.

ఆదిలో అసలు జీవాణువుల సంఖ్య $X_0$, అంటే 0-అతం (generation) లోని జీవుల సంఖ్య $X_0$ అనుకొందాము. ఈ $X_0$ జీవాణువుల కుద్భవించిన మొత్తం చిన్న జీవాణు

---

*ధనపూర్ణాంకమువలనే స్వీకరించే యాదృచ్ఛిక చలరాశి X యొక్క సంభావ్యతా విభాజనము $P(X = k) = a_k \geq 0, \sum_{0}^{\infty} a_k = 1$ అయి, $|z| \leq 1$ అయ్యేటట్లు సంకీర్ణ చలరాశి z యొక్క ఒక్క విలువకైనా $\sum_{0}^{\infty} a_k z^k$ అభిసరణం చెందితే, అట్టి ఘాత శ్రేణిని X యొక్క జనక ప్రమేయమంటారు.

వుల సంఖ్య $X_1$ అయితే, 1-వ తరంలోని జీవుల సంఖ్య $X_1$ అన్నమాట. ఇదేవిధంగా n-వ తరంలోని జీవుల సంఖ్య $X_n$ తో సూచిస్తే $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ ప్రక్రియను విచ్ఛిన్న బ్రాంచింగ్ ప్రక్రియ (discrete branching process) అంటారు. ఇప్పుడు ఈ ప్రక్రియను పరిశీలిద్దాము.

n-వ తరంలోని సంఖ్య తెలిస్తే, $(n+1)$-వ తరాన్ని పరిశీలించడానికి. n-వ తరానికి ముందు తరాలకు సంబంధించిన సమాచారంతో ప్రమేయంలేదు. అంటే $X_n$ విలువ ఆధారంగా, $X_{n+1}$ ను తెలుసుకోడానికి $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ విలువలతో పనిలేదు కాబట్టి $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ మార్కొవ్ శృంఖలమవుతుంది దీని సంక్రమ సంభావ్యతా ప్రమేయాలను తెలుసుకొందాము.

n వ తరంలోని జీవాణువుల సంఖ్య $X_n = i$ అనుకొందాము. ఈ i జీవాణువులలో r $(r = 1, 2, \ldots, i)$ వ జీవికి ఉద్భవించిన చిన్న జీవాణువులు ఒక యాదృచ్ఛిక సంఖ్యలో ఉండవచ్చు కాబట్టి దీనిని $Z_r$ తో సూచిస్తే, $Z_1, Z_2, \ldots, Z_i$ లు స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులై పై Z విభాజనాన్ని అనుసరిస్తాయని గ్రహించవచ్చు. $(n+1)$-వ తరంలోని జీవులసంఖ్య $X_{n+1} = \sum_{r=1}^{i} Z_r$. ప్రతి $j \geq 0$

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P\left(\sum_{r=1}^{i} Z_r = j\right)$$

ఈ సంక్రమ సంభావ్యతా ప్రమేయము సంక్రమ సమయము n పై ఆధారపడలేదు. కాబట్టి $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ సజాతీయ మార్కొవ్ శృంఖలమవుతుంది. దీనిని $p_{ij}$ తో సూచిస్తే,

$$p_{ij} = P\left(\sum_{1}^{i} Z_r = j\right)$$

దీనినిబట్టి $X_{n+1} \mid X_n = i$ యొక్క విభాజనము $\sum_{1}^{i} Z_r$ యొక్క విభాజనంతో ఏకీభవిస్తుందని గమనించవలె. $p_{ij}$ ని కనుక్కోడానికి జనక ప్రమేయ ధర్మాన్ని వాడితే,

$[X_{n+1} \mid X_n = i]$ యొక్క జనక ప్రమేయము

$= \left[\sum_{1}^{i} Z_r\right]$ యొక్క జనక ప్రమేయము.

కాని $Z_1, Z_2, \ldots, Z_i$ లు స్వతంత్ర సమవిభాజన యాదృచ్ఛిక చలరాశులు.

$$\therefore \left[\sum_{1}^{i} Z_r\right] \text{ యొక్క జనక ప్రమేయము } = \{g(z)\}^i = \left\{\sum_{0}^{\infty} a_k z^k\right\}^i$$

$\therefore$ ప్రతి $i > 0$ కు

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} z^j = \left\{\sum_{0}^{\infty} a_k z^k\right\}^i \qquad \ldots \quad 2.5.6$$

$\therefore$ $p_{ij}$ = కుడివైపు ఘాతశ్రేణిలోని $z^j$ యొక్క గుణాంకమవుతుంది.

$X_0 = 1$ అయిన సందర్భంలో $n$ - వ తరంలోని జీవాణువుల సంఖ్య $X_n$ ను తెలుసుకొనే అవసరం, ఆసక్తి కలగవచ్చు. ఇప్పుడు దీనిని పరిశీలిద్దాము.

$X_1$, 1 - వ తరంలోని సంఖ్య యొక్క ఉపాంత సంభావ్యతలు

$$p_j^{(1)} = P(X_1 = j) = P(Z = j) = a_j, \; j > 0$$

$X_1$ యొక్క జనక ప్రమేయము

$$P(z) = P_1(z) = \sum p_j^{(1)} z^j = \sum a_j z^j$$

ఇదే విధంగా ప్రతి $n > 1$ కు, $X_n$ యొక్క ఉపాంత సంభావ్యతలు

$$p_j^{(n)} = P(X_n = j) = P(X_n = j \mid X_0 = 1) = p_{1j}^{(n)}$$

దీని జనక ప్రమేయము

$$P_n(z) = \sum p_j^{(n)} z^j$$

అనుకొంటే, $X_{n+1}$ యొక్క జనక ప్రమేయము

$$P_{n+1}(z) = \sum_j p_j^{(n+1)} z^j$$

$$= E\left(z^{X_{n+1}}\right)$$

$$= \sum_j E\left(z^{X_{n+1}} \mid X_n = j\right) . P(X_n = j)$$

$$= \sum_j \{P(z)\}^j . P(X_n = j) \qquad ((2.5.6) \text{ నుంచి})$$

$$= \sum_j p_j^{(n)} \{P(z)\}^j = P_n \left[P(z)\right]$$

ఇదే విధంగా గణితానుగమనం ప్రకారం

$$P_{n+1}(z) = P\left[P_n(z)\right]$$

అని కూడా చూపవచ్చు.

$$\therefore \quad P_{n+1}(z) = P_n\left[P(z)\right] = P\left[P_n(z)\right] \qquad \ldots \quad 2.5.7$$

(2.3.2) దృష్ట్యా n - మెట్టు సంక్రమ సంభావ్యతా ప్రమేయము $p_{ij}^{(n)} = \left[P_n(z)\right]^j$ విపులీకరణంలోని $z^j$ గుణాంకము.

## 2.6 స్థితుల వర్గీకరణము

దృగ్విషయాలను మార్కోవ్ శృంఖలాల ద్వారా రూపకల్పనచేసి, వాటి ఆధారంగా దృగ్విషయాల పురోగమనాన్ని విశ్లేషించడం జరుగుతుంది. సాధారణంగా ఈ విశ్లేషణకై మార్కోవ్ శృంఖలాలు కాలగమనంలో ఏ ఏ స్థితులను ప్రవేశిస్తున్నాయో పరిశీలిస్తే చాలు. మార్కోవ్ శృంఖలాలు స్థితి ఆవరణంలోని వివిధ స్థితులలో దేనినైనా ప్రవేశించవచ్చు. కాబట్టి ఈ విషయాన్ని దృష్టిలో పెట్టుకొని ఇప్పుడు స్థితి ఆవరణంలోని స్థితుల వర్గీకరణను చేద్దాము.

(i) *ప్రవేశింప తగిన స్థితి* (accessible state): మార్కోవ్ శృంఖలం యొక్క స్థితి ఆవరణంలో i, j లు ఏవైనా రెండు స్థితులు అనుకొందాము. అశూన్య సంభావ్యతతో మార్కోవ్ శృంఖలం పరిమితకాలంలో i – స్థితినుంచి j – స్థితిని చేరగలిగితే అట్లాంటి j ని i నుంచి ప్రవేశింపదగు స్థితి (accessible state) అంటాము. అంటే, ప్రతి పరిమిత ధనపూర్ణాంకము n కు సంబంధించి, $P_{ij}^{(n)} > 0$ అయితే i నుంచి j ప్రవేశింప తగిన స్థితి అవుతుంది. దీనిని సాంకేతికంగా $i \longrightarrow j$ తో చూపుదాము.

(ii) *సమాచార స్థితులు* (communicating states): అశూన్య సంభావ్యతలతో మార్కోవ్ శృంఖలం ఏదైనా i స్థితి నుంచి మరొక స్థితి j నీ, తిరిగి j స్థితి నుంచి i స్థితిని ప్రవేశింపగలగితే, S లోని అట్లాంటి i, j స్థితులను సమాచార స్థితులు (comminicatng states) అంటాము. i, j లు సమాచార స్థితులయితే, $p_{ij}^{(n)} > 0$, $p_{ji}^{(m)} > 0$ అయ్యేటట్లు n, m అనే రెండు పరిమిత ధన పూర్ణాంకాలు ఉంటాయి. దీనిని సాంకేతికంగా $i \longleftrightarrow j$ తో చూపుదాము. అంటే,

$$i \longrightarrow j,\ j \longrightarrow i \Rightarrow i \longleftrightarrow j$$

ఏదైనా n, m $(< \infty)$ లకు $p_{ij}^{(n)} = 0$ లేదా $p_{ji}^{(m)} = 0$ అయితే, i, j స్థితులు అసమాచారస్థితులు (non-communicating states) అంటాము.

సమాచార లక్షణానికి సౌష్ఠవతా ధర్మము, సంక్రమణ ధర్మము ఉన్నాయని చూడవచ్చు.

*సౌష్ఠవతా ధర్మము* (Symmetric property) : $i \longleftrightarrow j \Rightarrow j \longleftrightarrow i$. ఇది సమాచార నిర్వచనాన్ని బట్టి అనుసరిస్తుంది.

*సంక్రమణ ధర్మము* (transition property) : ప్రతి $i, j, k \in S$ కు సంబంధించి,

$$i \longleftrightarrow j,\ j \longleftrightarrow k \Rightarrow i \longleftrightarrow k$$

ఎందుచేతనంటే, $i \longleftrightarrow j$, $j \longleftrightarrow k$ అయితే, $p_{ij}^{(n)} > 0$, $p_{jk}^{(m)} > 0$ అయ్యేటట్లు రెండు పరిమిత పూర్ణాంకాలు $n, m > 0$ ఉంటాయి. కాని (2.3.8) ప్రకారం

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{j \in S} p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0$$

$\therefore$ $p_{ik}^{(s)} > 0$ అయ్యేటట్లు $s\ (> 0)$ ను కనుక్కోవచ్చు. అంటే, $i \rightarrow k$. ఇదేవిధంగా $p_{ki}^{(r)} > 0$ అయ్యేటట్లు ఒక పరిమిత ధనపూర్ణాంకం $r$ ను కనుక్కోవచ్చు. అంటే, $k \rightarrow i$ కాబట్టి, $i \longrightarrow k$, $k \longrightarrow i \Rightarrow i \longleftrightarrow k$.

(iii) *సమాచార తరగతులు* (communicating classes) : సమాచార లక్షణాన్ని బట్టి స్థితి ఆవరణంలోని వివిధస్థితులను కొన్ని సమాన తరగతులుగా వర్గీకరిస్తాము. మార్కోవ్ శృంఖలము $i$ స్థితినుండి వేరే స్థితులను ప్రవేశించడం, తిరిగి ఆ స్థితుల నుంచి $i$ స్థితిని ప్రవేశించడం జరిగితే అటువంటి సమాచార స్థితుల సమూహాన్ని మార్కోవ్ శృంఖలం యొక్క సమాచార తరగతి (communicating class) అంటాము. $i$ తో సమాచారమందుకొనే స్థితుల సమూహాన్ని $i$ స్థితి సమాచార తరగతి అవుతుంది. దీనిని $c(i)$ తో సూచిస్తే, ప్రతి

$$j \in S,\ i \longleftrightarrow j \Rightarrow j \in c(i) \text{ లేదా } j \in c(i) \Rightarrow i \longleftrightarrow j.$$

ఒక్కొక్కప్పుడు $c(i)$ శూన్యతరగతి కావచ్చు. అంటే, $i$ స్థితితో సమాచారమందుకొనే స్థితులు $S$ లో లేనప్పుడు, $c(i) = \phi$. అప్పుడు మార్కోవ్ శృంఖలం $i$ స్థితి నుంచి బయలుదేరి ఏ దశలోనైనా తిరిగి $i$ ని ప్రవేశించదన్నమాట. అట్టి $i$ స్థితిని 'తిరిగి చేరని' (non-return) స్థితి అంటాము. $c(i)$ అశూన్య తరగతి అయితే, $i$ స్థితి నుంచి బయలుదేరి తిరిగి $i$ స్థితిని ప్రవేశిస్తుందన్నమాట. అంటే, సంక్రమణ ధర్మం ప్రకారం $i \longleftrightarrow j$, $j \longleftrightarrow i$ అయ్యేటట్లు ఏదో ఒక స్థితి $j$ ఉంటూ, $i \longleftrightarrow i$ అవుతుంది. దీనినిబట్టి $c(i) \neq \phi$ అయితే, $i$ స్థితి $i$ తోనే సమాచార మందుకొంటుంది. అటువంటి $i$ స్థితిని 'తిరిగి చేరు' (return) స్థితి అని గ్రహించవచ్చు.

S లో వేర్వేరు రెండు సమాచార తరగతులు c (i), c (j) లు ఉంటే, అవి పరస్పర వియుక్త (mutually exclusive) తరగతులని నిరూపించవచ్చు. ఎట్లాగంటే, వీటికి k అనే ఉమ్మడి స్థితి ఉండి ఉంటే, $i \longleftrightarrow k,\ k \longleftrightarrow j \Rightarrow i \longleftrightarrow j$. అంటే, k ద్వారా c (i) లోని ప్రతీ స్థితి c (j) లోని ప్రతీ స్థితితో సమాచారమందుకొంటూ, c (i), c (j) లు కలిసి ఒకే సమాచార తరగతి అయ్యే అవకాశం ఏర్పడుతుంది. కాబట్టి c (i), c (j) లు పరస్పర వియుక్త తరగతులు అవుతాయి. అందువల్ల మార్కొవ్ శృంఖలం అశూన్య సంభావ్యతతో ఒక సమాచార తరగతి నుంచి మరో సమాచార తరగతిని ప్రవేశించ వచ్చుగాని, తిరిగి మొదటి తరగతిని ప్రవేశించడం అసంభవము. అంటే,

$$i \in c(i),\ j \notin c(i) \Rightarrow p_{ij}^{(n)} > 0,\ p_{ji}^{(m)} = 0,$$

లేదా $p_{ij}^{(n')} = 0$, $p_{ji}^{(m')}$ అయ్యేటట్లు $n, m, n', m' > 0$ ఉంటాయి. ఈ విధంగా స్థితి ఆవరణము S ని పరిమిత లేదా గణన సాధ్యమైన వియుక్త సమాచార తరగతులుగా విడదీయవచ్చు.

ఉదాహరణకు, స్థితి ఆవరణము $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ గా గల మార్కొవ్ శృంఖలం యొక్క సంక్రమ సంభావ్యతా మాత్రిక P ని పరిశీలిద్దాము.

$$P = \begin{matrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

ఇక్కడ $1 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longleftrightarrow 4,\ 4 \longleftrightarrow 5$. సంక్రమణ ధర్మం ప్రకారం $3 \longleftrightarrow 5$. కాబట్టి S ని $\{1, 2\}$, $\{3, 4, 5\}$ అనే రెండు వియుక్త సమాచార తరగతులుగా విడదీయవచ్చు.

(iv) *సంవృత తరగతి* (closed class) : ఏదైనా ఒక సమాచార తరగతిలోని i స్థితి నుండి ఆ తరగతికి చెందని ప్రతి j స్థితి ప్రవేశింపదగని (not aceessible) స్థితి అయితే, అట్టి సమాచార తరగతిని సంవృత తరగతి (closed class) అంటాము. సాంకేతికంగా, ఒక సమాచార తరగతి C కి సంబంధించి, ప్రతి $i \in C,\ j \notin C$ అయి, $p_{ij}^{(n)} = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ అయితే C ని సంవృత తరగతి అంటాము. ఇక్కడ గ్రహించవలసింది

ఏమంటే $p_{ji}^{(n)} > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ కావచ్చు. అంటే C కి చెందని స్థితులకు C లోని స్థితులు ప్రవేశింపదగు స్థితులు కావచ్చు. మార్కోవ్ శృంఖలం ఒక పర్యాయం సంవృత తరగతిలోకి ప్రవేశించిందంటే, తదనంతరం అక్కడే ఉండిపోతుంది. ఒకే మూలకం గల సంవృత తరగతిని విలీన (absorbing) తరగతి అంటాము.

రెండు విలీన హద్దులుగల యాదృచ్ఛిక నడకకు సంబంధించి 2.5.2 లోని సంక్రమ సంభావ్యతా మాత్రికను పరిశీలిస్తే,

$S = \{0, 1, 2, \ldots, a-1, a\}$. S ను $\{0\}$, $\{1, 2, \ldots, a-1\}$, $\{a\}$ అనే మూడు పరస్పర వియుక్త సమాచార తరగతులుగా విడదీయవచ్చు. రెండో తరగతి నుంచి మొదటి తరగతిలోకి, మూడో తరగతిలోకి ప్రవేశించడానికి వీలవుతుంది. కాని 1, 3 వ తరగతుల నుండి తిరిగి రెండో తరగతిని ప్రవేశించడం అసంభవము. కాబట్టి $\{0\}$, $\{a\}$ లు సంవృత తరగతులు. ఇవి ఒక మూలకంగల తరగతులు కావడంచేత విలీన తరగతులు కూడా అవుతాయి.

(v) *విడదీయలేమి* (irreducible) *మార్కోవ్ శృంఖలము* : ఏ మార్కోవ్ శృంఖలానికి సంబంధించిన స్థితి ఆవరణంలోని స్థితులన్నీ కలసి ఒకే సంవృత తరగతిగా ఏర్పడతాయో, అట్లాంటి దానిని విడదీయలేమి మార్కోవ్ శృంఖలమంటారు. విడదీయలేమి మార్కోవ్ శృంఖలంలో అన్ని స్థితులు ఒకదాని నొకటి ప్రవేశింపదగు స్థితులు అని స్పష్టమవుతుంది. అంటే, ప్రతి $i, j \in S$ కు, $p_{ij}^{(n)} > 0$ అయ్యేటట్లు కనీసం ఒక్క పరిమిత ధన పూర్ణాంకము n అయినా ఉంటుందన్న మాట.

స్థితి ఆవరణము $S = \{1, 2, 3, 4\}$ గాగల మార్కోవ్ శృంఖలం యొక్క సంక్రమ సంభావ్యతా మాత్రిక

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

ను పరిశీలిస్తే, ప్రతి $i, j = 1, 2, 3, 4$ లకు $p_{ij}^{(n)} > 0$ అయ్యేటట్లు ఒక పరిమిత $n > 0$ కనుక్కోవచ్చు. కాబట్టి S ఒకే సమాచార తరగతి, దాని మార్కోవ్ శృంఖలం విడదీయలేమి అవుతుంది. ఇదే విధంగా 'క్యూ' నమూనాకు సంబంధించి (2.5.5) లో ఇచ్చిన మాత్రిక ప్రకారం ప్రతి k కి $a_k > 0$ అయితే అది విడదీయలేమి మార్కోవ్ శృంఖలమని చూపవచ్చు.

(vi) ఆవర్తిత స్థితులు (periodic states) : స్థితి ఆవరణంలోని కొన్ని స్థితులను వదలి మార్కోవ్ శృంఖలం తిరిగి నియమిత కాలాలవద్ద మాత్రమే ఆ స్థితులను ప్రవేశించడం జరుగుతుంది. అశూన్య సంభావ్యతలతో ప్రతి $d > 0$ కి, $d$, $2d$, $3d$, ... సమయాల వద్ద మాత్రమే ఏ స్థితి $i$ ని ప్రవేశించడం జరుగుతుందో, ఆ $i$ స్థితిని ఆవర్తిత స్థితి (periodic state) అనీ, $d$ ని $i$ స్థితియొక్క ఆవర్తన కాలము (period) అనీ అంటాము. గణితీయంగా, $i$ స్థితికి సంబంధించి, $p_{ii}^{(n)} > 0$ అయ్యే అన్ని ధనపూర్ణాంకాలు $n$ యొక్క గరిష్ఠ సామాన్య భాజకము (greatest common divisor) ను ($d_i$ తో సూచిస్తూ) $i$ స్థితి ఆవర్తన కాలమంటాము.

$d_i$ చే $n$ భాగింపదగినది అయితే, $p_{ii}^{(n)} > 0$

$d_i$ చే $m$ భాగింపదగనిది అయితే, $p_{ii}^{(m)} = 0$.

$d_i = 1$ అయితే $i$ స్థితిని అనావర్తిత (aperiodic) స్థితి అంటాము.

ఆవర్తిత, అనావర్తిత స్థితులు కింది ముఖ్యధర్మాన్ని ప్రదర్శిస్తాయి. పైనిర్వచనాన్ని అనుసరించి ఇది నిజమని తెలుస్తుంది.

సిద్ధాంతము 2.6.1 : $i$ స్థితి ఆవర్తనకాలము $d_i$ ($\geq 1$) అయితే, అన్ని పూర్ణాంకాలు $n \geq N$ కు, $p_{ii}^{(nd_i)} > 0$ అయ్యేటట్లు ఒక పూర్ణాంకము $N > 0$ ఉంటుంది.

*ఉపసిద్ధాంతము* 2.6.2 : $p_{ji}^{(m)} > 0$ అయితే, $n \geq N$ కు $p_{ji}^{(m+nd_i)} > 0$ అయ్యేటట్లు $N > 0$ ఉంటుంది. ఎందుచేతనంటే, 2.3.8 దృష్ట్యా,

$$p_{ji}^{(m+nd_i)} = \sum_{k \in S} p_{jk}^{(m)} p_{ki}^{(nd_i)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(nd_i)} > 0.$$

సిద్ధాంతము 2.6.3 : $i \longleftrightarrow j$ అయితే, $i$, $j$ స్థితుల ఆవర్తనకాలాలు $d_i = d_j$

*నిరూపణ* : ఏదైనా పూర్ణాంకము $s > 0$ యొక్క భాజకము $d_i$ అనుకొందాము. ఆవర్తనకాల నిర్వచనము, పై ముఖ్య ధర్మం ప్రకారము,

$$p_{ii}^{(Ns)} > 0,\ p_{ii}^{(\overline{N+1}s)} > 0, \ldots\ldots$$

$\therefore$ $(N+1)s - Ns$, $(N+2)s - Ns$, ... లను $d_i$ చే భాగించవచ్చు. $i \longleftrightarrow j$ కాబట్టి $p_{ij}^{(m)} > 0$, $p_{ji}^{(n)} > 0$ అయ్యేటట్లు $n, m > 0$ లు ఉంటాయి. ఇప్పుడు,

$$p_{jj}^{(n+Ns+m)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(Ns)} p_{ij}^{(m)} > 0$$

ఇదే విధంగా, $$p_{jj}^{(n+\overline{N+1}s+m)} > 0$$

$\therefore$ $j$ యొక్క ఆవర్తనకాలము $d_j$ చే

$$\bar{n} + (N+1)s + \bar{m} - \bar{n} + Ns + \bar{m} = s$$

ని భాగించవచ్చు. అంటే $d_i$ చే s ని భాగిస్తే, $d_j$ చే కూడా s ని భాగించవచ్చు అని నిరూపించినాము. దీనినిబట్టి $d_j$ చే $d_i$ ని భాగించవచ్చని స్పష్టమవుతుంది. ఇదే విధంగా $p_{ij}^{(m+Nr+n)}$ తో ప్రారంభమై $d_i$ చే $d_j$ ని భాగించవచ్చని నిరూపిస్తాము. ఇది $d_i = d_j$ అయినప్పుడే సంభవం కాగలదు.

ఒకే సమాచార తరగతిలోని అన్ని స్థితులకు ఒకే ఆవర్తనకాలం ఉంటుందని పై సిద్ధాంతం దృష్ట్యా స్పష్టమవుతుంది. అంటే ఆవర్తన లక్షణం తరగతి ధర్మము* (class property) అవుతుంది. విడదీయలేమి మార్కోవ్ శృంఖలాలకు సంబంధించిన స్థితులన్నీ అనావర్తనాలు అయితే, $n \geq N$ అయి, $P^{(n)}$ లోని ప్రతి మూలకము $p_{ij}^{(n)} > 0$ అయ్యేటట్లు ఒక ధనపూర్ణాంకం N ఉంటుందని పై సిద్ధాంతాల ఆధారంగా కూడా గ్రహించవచ్చు.

ఉదాహరణగా, 4 స్థితులుగల సజాతీయ మార్కోవ్ శృంఖలం యొక్క P ని పరిశీలిద్దాము.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

దీని నుంచి, $P^{(2)} = P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

సార్వత్రికంగా, $n = 1, 2, 3, \ldots$ లకు

$$P^{(2n+1)} = P, \quad P^{(2n)} = P^2.$$

---

*సమాచార తరగతిలో ఒక స్థితి ఏదైనా లక్షణాన్ని పొంది ఉంటే, ఆ తరగతిలోని అన్ని స్థితులు కూడా అదే లక్షణాన్ని పొంది ఉండడం తరగతి ధర్మమవుతుంది.

పై మార్కోవ్ శృంఖలం ఏదైనా ఒకస్థితి i నుంచి బయలుదేరి, $n = 2, 4, 6, \ldots$ వ మెట్ల వద్ద మాత్రమే i స్థితిని తిరిగి ప్రవేశిస్తుంది. కాబట్టి పై P కి సంబంధించిన మార్కోవ్ శృంఖలం ఆవర్తిత మార్కోవ్ శృంఖలమనీ, దాని ఆవర్తన కాలము 2 అనీ చెప్పవచ్చు.

## 2.7 పునరావృత స్థితులు (recurrent states)

మార్కోవ్ శృంఖలం పరిమిత కాలము (finite steps) లో ఒక స్థితినుంచి మరో స్థితిని ప్రవేశించడాన్ని బట్టి స్థితులను వివిధ సమాచార స్థితులుగా పైన వర్గీకరించాము. కాని ఏదైనా దృగ్విషయాన్ని మనం అనంతంగా చాలకాలము ($n = \infty$) పరిశీలించగలిగినప్పుడు ఈ అనంతకాలము (infinite steps) లో వ్యవస్థ కొన్ని స్థితులను అనంతంగా పలుమార్లు** (infinitely often), మరికొన్ని స్థితులను పరిమితంగా పలుమార్లు (finitely often) సందర్శించడం గమనిస్తాము. ఈ విధంగా వ్యవస్థ లేదా దానిని రూపకల్పన చేసే మార్కోవ్ శృంఖలం అనంతంగా పలుమార్లు ప్రవేశించే స్థితుల తరగతి, పరిమితంగా పలుమార్లు ప్రవేశించే స్థితుల తరగతి అని స్థితి ఆవరణాన్ని రెండు ప్రత్యేక తరగతులుగా విడదీయడానికి అనువైన ప్రమాణాన్ని (criterion) రూపొందిద్దాము. ఈ ప్రమాణము ఏర్పాటుకు అవసరమైన సంకేతాలను ముందుగా వివరిద్దాము.

S లో ఏదైన ఒక స్థితి i కి ప్రతి పూర్ణాంకము $n > 0$ కు సంబంధించి కింది సంభావ్యతలను నిర్వచిస్తే,

$p_{ii}^{(n)} = P$ (వ్యవస్థ ఆదిలో i స్థితినుంచి బయలుదేరి, n వ మెట్టులో i స్థితిని తిరిగి ప్రవేశించడం)

$= P(X_n = i \mid X_0 = i)$ అనితెలుసు.

$f_{ii}^{(n)} = P$ (వ్యవస్థ ఆదిలో i స్థితినుంచి బయలుదేరి. n వ మెట్టులో i స్థితిని తిరిగి ప్రథమంగా సందర్శించడం)

$= P(X_n = i, X_l \neq i \ (l = 1, 2, \ldots, n-1) \mid X_0 = i)$

$f_{ii}^{(n)}$ ని n వ మెట్టులో i స్థితినిచేరు ప్రథమ ప్రవేశ సంభావ్యత (first entrance probability) అంటాము. $f_{ii}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}$ అయితే, $f_{ii}^{*}$, ఆదిలో i స్థితినుంచి బయలుదేరి తిరిగి i స్థితిని ప్రవేశించే సంభావ్యతను తెలుపుతుందన్నమాట. ఇదే విధంగా, $p_{ij}^{(n)}$, $f_{ij}^{(n)}$, $f_{ij}^{*}$ లను నిర్వచిస్తాము. ప్రత్యేకించి. $f_{ii}^{(0)} = 0$, $f_{ii}^{(1)} = p_{ii}$ అవుతాయి. ప్రథమ

---

**పరిశీలించిన అనంత కాలము ($n = \infty$) లో అనంతమైన సార్లు ఒక స్థితిని ప్రవేశిస్తే, దానిని 'అనంతంగా పలుమార్లు' ప్రవేశించిందనీ; అదే అనంతకాలంలో కొన్నిసార్లు ($r < \infty$) మాత్రమే ప్రవేశిస్తే, 'పరిమితంగా పలుమార్లు' ప్రవేశించిందనీ అంటాము.

ప్రవేశ సంభావ్యతలు $f_{ii}^{(n)}$ లను సంక్రమ సంభావ్యతలు $p_{ii}$ ల ద్వారా కింది సమీకరణం సహాయంతో గణించవచ్చు.

ప్రతి పూర్ణాంకము $n > 0$, ప్రతి $i, j \in S$ లకు.

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{r=1}^{n} f_{ij}^{(r)} p_{jj}^{(n-r)} \qquad \ldots 2.7.1$$

ఎందుచేతనంటే, $X_0 = i$, $X_n = j$ అవుతూ $r\ (\leq n)$ వ మెట్టులో ప్రథమంగా $j$ స్థితిని ప్రవేశించే ఘటనను $A_r$ తో సూచిస్తే, $A_r\ (r = 1, 2, \ldots, n)$ లు పరస్పర వియుక్త ఘటనలని స్పష్టమవుతుంది. కాని $X_0 = i$ అయి, అంటే ఆదిలో $i$ – స్థితి నుంచి $r$ వ మెట్టులో ప్రథమంగా $j$ – స్థితిని ప్రవేశించే సంభావ్యత $f_{ij}^{(r)}$ ; మిగిలిన $n - r$ మెట్లలో తిరిగి $j$ స్థితిని ప్రవేశించే సంభావ్యత $p_{jj}^{(n-r)}$ అవుతాయి కాబట్టి గుణన సంభావ్యతా సిద్ధాంతం ప్రకారము

$$P(A_r) = f_{ij}^{(r)} \cdot p_{jj}^{(n-r)}, \qquad r = 1, 2, \ldots, n$$

$$\therefore \quad p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \quad X_0 = i)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} P(A_r).$$

$$= \sum_{r=1}^{n} f_{ij}^{(r)} \cdot p_{jj}^{(n-r)} \qquad \forall i, j \in S.$$

ప్రత్యేకించి $i = j$ అయితే,

$$p_{ii}^{(n)} = \sum_{r=1}^{n} f_{ii}^{(r)} p_{ii}^{(n-r)} \qquad \ldots \quad 2.7.2$$

$f_{ii}^{(0)} = 0$ కాబట్టి (2.35) నుంచి,

$$f_{ii}^{(n)} = p_{ii}^{(n)} - \sum_{r=1}^{n-1} f_{ii}^{(r)} p_{ii}^{(n-r)} \qquad \ldots 2.7.3$$

(2.36) సహాయంతో $P = (p_{ij})$ తెలిస్తే, $f_{ii}^{(1)}, f_{ii}^{(2)}, \ldots$ లను పారంపర్యయంగా గణించవచ్చు.

అనంతంగా ఏదేని వ్యవస్థను పరిశీలించినప్పుడు అది కొన్ని స్థితులను కనీసం కొన్నిసార్లు మాత్రమే ప్రవేశించడం లేదా ఆక్రమించడం జరుగుతుంది. ఇప్పుడు ఈ ఆక్రమణ సంభావ్యతలు (occupation probabilities) ను పరిశీలిద్దాము.

$g_{ij}^{(n)} = P$ (వ్యవస్థ i స్థితి నుంచి ఆదిలో బయలుదేరి, తిరిగి కనీసం n సార్లు అయినా j స్థితిని ఆక్రమించడం)

అయితే,

$$g_{ij}^{(n)} = \sum_{r=1}^{\infty} f_{ij}^{(r)} g_{jj}^{(n-1)} \text{ అని వ్రాయవచ్చు.}$$

$$\therefore \quad g_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{*} \, g_{jj}^{(n-1)}$$

ప్రత్యేకంగా, $g_{ij}^{(1)} = f_{ij}^{*}$

(2.7.4) ప్రకారము,

$$g_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{*} g_{jj}^{(n-1)} = f_{ij}^{*} \cdot f_{jj}^{*} \left(g_{jj}^{(n-2)}\right) = f_{ij}^{*} \left(f_{jj}^{*}\right)^2 g_{jj}^{(n-3)}$$

$$\ldots = f_{ij}^{*} \left(f_{jj}^{*}\right)^{n-1} \text{ అవుతుంది.}$$

ప్రత్యేకంగా, $g_{ij}^{(n)} = \left(f_{ij}^{*}\right)^n$.

$$g_{ij}^{*} = \lim_{n \to \infty} g_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{*} \lim_{n \to \infty} \left(f_{jj}^{*}\right)^{n-1}$$

లేదా

$$g_{ii}^{*} = \lim_{n \to \infty} g_{ii}^{(n)} = \lim_{n \to \infty} \left(f_{ii}^{*}\right)^{(n)}$$

తో సూచిస్తే, $g_{ii}^{*}$, వ్యవస్థ ఆదిలో i–స్థితినుంచి బయలుదేరి, తిరిగి i స్థితిని అనంతంగా పలుమార్లు సందర్శించే సంభావ్యతను తెలుపుతుంది. (2.7.5) నుండి,

$$f_{ii}^{*} = 1 \Rightarrow g_{ii}^{*} = 1$$

అంటే, i స్థితి నుంచి ఆదిలో బయలుదేరి తుదకు i స్థితిని ప్రవేశించడం తథ్యమయితే, అటువంటి i స్థితిని ఆ వ్యవస్థ అనంతంగా పలుమార్లు ప్రవేశించడం కూడా తథ్యమన్నమాట. 2.7.5 నుంచి

$$f_{ii}^{*} < 1 \Rightarrow g_{ii}^{*} = 0$$

అంటే, i స్థితి నుంచి ఆదిలో బయలుదేరి తుదకు i స్థితిని ప్రవేశించడం అనిశ్చయమయి అటువంటి i స్థితిని వ్యవస్థ పరిమితంగా పలుమార్లు మాత్రమే ప్రవేశిస్తుందన్న మాట.

నిర్వచనం 2.7.1 ; $f_{ii}^* = 1$ అయితే, i స్థితిని పునరావృత స్థితి 'recurrent state' అనీ, $f_{ii}^* < 1$ అయితే i స్థితిని సంక్రమణ స్థితి (transient లేదా non-recurrent) అనీ అంటాము.

$$\therefore \text{ i పునరావృతస్థితి అయితే, } f_{ii}^* = 1 \Rightarrow g_{ii}^* = 1$$

$$\text{i సంక్రమణ స్థితి అయితే, } f_{ii}^* < 1 \Rightarrow g_{ii}^* = 0.$$

దీనినిబట్టి పునరావృత స్థితులను అనంతంగా పలుమార్లు ప్రవేశించడం, సంక్రమణ స్థితులను పరిమితంగా పలుమార్లు మాత్రమే సందర్శించడం జరుగుతుందని స్పష్టమవుతుంది.

సిద్ధాంతము 2.7.2 : $j \to i$ అయి, j పునరావృత స్థితి అయితే, $f_{ij}^* = 1$

నిరూపణ : ప్రతి i స్థితి $j \varepsilon S$, పూర్ణాంకము $n > 0$ కు సంబంధించి,

$$g_{jj}^* = \sum_{k \varepsilon S} p_{jk}^{(n)} g_{kj}^* \text{ అని చూడవచ్చు.}$$

$$\therefore 1 - g_{jj}^* = \sum_{k \varepsilon S} p_{jk}^{(n)} (1 - g_{kj}^*)$$

j పునరావృత స్థితి అయితే, $g_{jj}^* = 1$ కాబట్టి ప్రతి $k \varepsilon S$ కు

$$0 = p_{jk}^{(n)} (1 - g_{kj}^*), \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

$k = i$ గా తీసుకొంటే,

$$0 = p_{ji}^{(n)} (1 - g_{ij}^*), \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

$j \longrightarrow i \Rightarrow p_{ji}^{(n)} > 0$ అయ్యేటట్లు $n > 0$ కనుక్కోవచ్చు.

$$\therefore 1 - g_{ij}^* = 0 \text{ లేదా } g_{ij}^* = 1.$$

(2.7.5) ప్రకారము

$$g_{ij}^* = f_{ij}^* = 1 \qquad (\because f_{jj}^* = 1)$$

$f_{ii}^*$ విలువలను బట్టి స్థితి ఆవరణంలోని స్థితులను పునరావృత స్థితులుగాను సంక్రమణ స్థితులుగాను వర్గీకరించ గలిగాము. ఈ ప్రథమ ప్రవేశ సంభావ్యతలను సంక్రమ సంభావ్యతల ద్వారా గణించవలసి ఉంది కాబట్టి పై వర్గీకరణ ప్రమాణాన్ని ప్రథమ ప్రవేశ సంభావ్యతలలోనేగాక సంక్రమ సంభావ్యతలలో కూడా కింది విధంగా రూపొందించవచ్చు.

*సిద్ధాంతము 2.7.3* ఒక స్థితి i పునరావృత స్థితి లేదా సంక్రమణ స్థితి **అవడానికి** ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమాలు వరసగా $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ లేదా $< \infty$.

*నిరూపణ :* 2.7.1 ప్రకారం,

$$\sum_{n=1}^{N} p_{ij}^{(n)} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{r=1}^{n} f_{ij}^{(r)} \cdot p_{jj}^{(n-r)}$$

$$= \sum_{r=1}^{N} f_{ij}^{(r)} \sum_{n=0}^{N-r} p_{jj}^{(n)}$$

$$\leq \sum_{r=1}^{N} f_{ij}^{(r)} \sum_{n=0}^{N} p_{jj}^{(n)}.$$

ఇదే విధంగా; ప్రతి $N' < N$ కు కూడా,

$$\sum_{n=1}^{N} p_{ij}^{(r)} \geq \sum_{r=1}^{N'} f_{ij}^{(r)} \sum_{n=0}^{N-N'} p_{jj}^{(n)}$$ అని చూడవచ్చు.

$$\therefore \sum_{r=1}^{N'} f_{ij}^{(r)} \sum_{n=0}^{N-N'} p_{jj}^{(n)} \leq \sum_{n=1}^{N} p_{ij}^{(n)} \leq \sum_{r=1}^{N} f_{ij}^{(r)} \sum_{n=0}^{N} p_{jj}^{(n)}$$

ఈ అసమీకరణంలో వరసగా అవధులు $N \longrightarrow \infty$, $N' \longrightarrow \infty$ ను తీసుకొంటే,

$$f_{ij}^{*} = \underset{N \longrightarrow \infty}{Lt} \frac{\sum_{n=1}^{N} p_{ij}^{(n)}}{\sum_{n=0}^{N} p_{jj}^{(n)}} \qquad \ldots 2.7.6$$

ప్రత్యేకించి, $i = j$ అయితే,

$$f_{ii}^* = \underset{N \to \infty}{Lt} \frac{\sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n)}}{1 + \sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n)}}$$

లేదా $$1 - f_{ii}^* = \underset{N \to \infty}{Lt} \left(1 + \sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n)}\right)^{-1} \quad \ldots 2.7.7$$

లేదా $$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = (1 - f_{ii}^*)^{-1}$$

దీనితో సిద్ధాంత నిరూపణ పూర్తి అవుతుంది.

*ఉప సిద్ధాంతము 2.7.4 :* j సంక్రమణ స్థితి అయితే,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = (1 - f_{jj}^*)^{-1};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = f_{ij}^*(1 - f_{jj}^*)^{-1} < \infty$$ అవుతుంది.

ఇది (2.7.6), (2.7.7) లనుబట్టి నిజమని రుజువవుతుంది.

*ఉపసిద్ధాంతము 2.7.5 :* $i \to j$ అయి, j పునరావృతస్థితి అయితే,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \infty.$$

*నిరూపణ :* $i \to j$ కాబట్టి $p_{ij}^{(m)} = \alpha > 0$ అయ్యేటట్లు కనీస పూర్ణాంకము $m > 0$ ఉంటుంది కాబట్టి, చాప్‌మెన్ కొల్మొగ్రోవ్ సమీకరణం (2.3.9) ప్రకారము,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{n=m}^{\infty} p_{ij}^{(n)} \geq \sum_{n=m}^{\infty} p_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} \geq \alpha \cdot \sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(r)}$$

$i \longrightarrow j$, $j$ పునరావృత స్థితి అయితే, $\alpha > 0$, $\sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(r)} = \infty$.

ఈ సందర్భంలో $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \infty$ అవుతుంది.

*ఉపసిద్ధాంతము* 2.7.6 ; $i \longleftrightarrow j$ అయి, $f_{ii}^* = 1$ లేదా $< 1 \Rightarrow f_{jj}^* = 1$ లేదా $< 1$. అంటే, పునరావృత (సంక్రమణ) స్థితులు పునరావృత (సంక్రమణ) స్థితుల తోనే సమాచారమందుకొంటాయి.

*నిరూపణ* : $i \longleftrightarrow j$ కాబట్టి $p_{ij}^{(n)} = \alpha > 0$, $p_{ji}^{(m)} = \beta > 0$ అయ్యే ట్లు పూర్ణాంకాలు $n$, $m > 0$ ఉంటాయి, ప్రతి $s$, $r > 0$ కు (2.3.8) ప్రకారము,

$$p_{ij}^{(m+s+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(s)} p_{ij}^{(n)} = \alpha\beta\, p_{ii}^{(s)}$$

$$\therefore \sum_{s=0}^{\infty} p_{jj}^{(m+s+n)} \geq \alpha\beta \cdot \sum_{s=0}^{\infty} p_{ii}^{(s)} \qquad (2.7.8)$$

ఇదే విధంగా, $\sum_{r=0}^{\infty} p_{ij}^{(n+r+m)} \geq \alpha\beta \cdot \sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(r)}$ (2.7.9)

(2.7.8) నుంచి,

$$\sum_{s=0}^{\infty} p_{ii}^{(s)} = \infty \Rightarrow \sum_{s=0}^{\infty} p_{jj}^{(s)} = \infty.$$

అంటే, $i$ పునరావృత స్థితి అయితే, $j$ కూడా పునరావృత స్థితి అవుతుంది. (2.7.9) నుంచి

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}^{(r)} < \infty \Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(r)} < \infty$$

అంటే, $i$ సంక్రమణస్థితి అయితే, $j$ కూడా సంక్రమణస్థితి అవుతుంది.

పునరావృతము, సంక్రమణ లక్షణాలు కూడా ఆవర్తన లక్షణంవలె తరగతి ధర్మాన్ని తెలుపుతాయి. అంటే, సమాచార తరగతిలో స్థితులన్నీ పునరావృత స్థితులుగాని, లేదా సంక్రమణ స్థితులుగాని అయి ఉంటాయి. పునరావృత స్థితులున్న సమాచార తరగతులను పునరావృత సమాచార తరగతి (recurrent communicating class) అంటాము.

## 2.8 పునరావృత లేదా నిరీక్షణాకాల విభాజనము

(recurrence or waiting time distribution) :

పునరావృత స్థితులే వున్న విడదీయలేమి మార్కోవ్ శృంఖలాలను ఇప్పుడు పరిశీలిద్దాము. వీనికి సంబంధించిన స్థితి ఆవరణం S లో, ప్రతీ రెండు స్థితులు i, j కు,

$$f_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1$$

i స్థితినుంచి ఆదిలో బయలుదేరి, తిరిగి j స్థితిని ప్రథమంగా ప్రవేశించే నిరీక్షణాకాలము (waiting time) T తో సూచిస్తే, T అన్ని ధనపూర్ణాంక విలువలను స్వీకరించే యాదృచ్ఛిక చలరాశి అవుతుంది. దీని సంభావ్యతా విభాజనము

$$P(T = n) = f_{ij}^{(n)},\ n = 1, 2, 3, \ldots ;\ f_{ij}^{(n)} \geq 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = f_{ij}^* = 1.$$

దీని అంకమధ్యమాన్ని $\mu_{ij}$ తో సూచిస్తే,

$$\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ij}^{(n)} \qquad (i \neq j)$$

ప్రత్యేకించి i = j అయినప్పుడు,

$$\mu_i = \mu_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{ii}^{(n)}$$

$\mu_{ij}$ ని, i స్థితినుంచి j స్థితిని ప్రథమంగా ప్రవేశించడానికి నగటు ప్రథమ ప్రవేశకాలము (mean first entrance) అనీ, $\mu_i$ ని i స్థితి సగటు పునరావృత లేదా నిరీక్షణా కాలము (mean recurrence or waiting time) అనీ అంటారు.

i పునరావృతస్థితి అయితే, మార్కోవ్ శృంఖలం తుదకు i స్థితిని ప్రవేశించడం తథ్యమని తెలుసు. కాని i స్థితిని తుదకు ప్రవేశించడానికి మార్కోవ్ శృంఖలానికి సగటున పరిమిత కాలమైనా లేదా అనంతకాలమైనా పట్టవచ్చు కాబట్టి ఈ నగటు నిరీక్షణాకాలము $\mu_i$ ని

బట్టి పునరావృత స్థితులను కింది విధంగా వర్గీకరిస్తాము.

*నిర్వచనము 2.8.1* $\mu_i < \infty$ అయితే i స్థితిని నిస్సంశయ (positive లేదా non-null) పునరావృత స్థితి అనీ, $\mu_i = \infty$ అయితే, i స్థితిని సంశయ (null) పునరావృత స్థితి అనీ అంటారు.

మార్కోవ్ శృంఖలానికి నిస్సంశయ పునరావృత స్థితులను సందర్శించడానికి సగటున పరిమిత కాలమే పట్టవచ్చుననీ, సంశయ పునరావృత స్థితులను సందర్శించడానికి సగటున అనంతకాలం పట్టవచ్చుననీ స్పష్టమవుతుంది. ఇక్కడ i విలీన స్థితి అయితే, $p_{ii} = 1$ కాబట్టి $f_{ii}^{(1)} = p_{ii} = 1$. అంటే, $f_{ii}^* = 1$, $\mu_i = 1$. దీనిని బట్టి, విలీన స్థితి నిస్సంశయ పునరావృత స్థితి అవుతుందన్నమాట.

*నిర్వచనము 2.8.2* : అనావర్తిత, నిస్సంశయ పునరావృత స్థితిని ఎర్గాడిక్ (Ergodic) స్థితి అంటారు.

ఇంతవరకు పై ప్రకరణాలలో చెప్పుకొన్న నిర్వచనాలు, స్థితి ఆవరణపు వర్గీకరణ విధానాలు పరిమిత స్థితులుగల మార్కోవ్ శృంఖలము (finite Markov chain) లకేగాక, గణనసాధ్యమైన స్థితులుగల మార్కోవ్ శృంఖలము (countably infinite Markov chain) లకు కూడా వర్తిస్తాయి. కాని రెండు రకాల మార్కోవ్ శృంఖలాల ధర్మాలను పరిశీలించేటప్పుడు మనం వాటిని వేరువేరుగా ప్రస్తావించడం చాల అనుకూలమూ, సమంజసంగా కూడా ఉంటుంది. పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలానికి సంబంధించిన ఒక ధర్మాన్ని ఇప్పుడు పరిశీలిద్దాము.

*సిద్ధాంతము 2.8.3* : పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలంలో పరిశీలనా కాలము (number of steps, n) అనంతమైన కొద్దీ ఆదిలో అది ఏ స్థితిలో ఉన్నా, తుదకు సంక్రమ స్థితిని చేరే సంభావ్యత అవధిలో సున్న అవుతుంది.

*నిరూపణ* : మార్కోవ్ శృంఖలం ఆదిలో పునరావృత స్థితిలో ఉంటే మరల పునరావృత స్థితినే ప్రవేశిస్తుంది కాని సంక్రమణ స్థితిని ప్రవేశించడం అసంభవమని తరగతి ధర్మాన్నిబట్టి గ్రహించినాము. ఈ సందర్భంలో ప్రక్రియ సంక్రమణస్థితిని ప్రవేశించే సంభావ్యత శూన్యమవుతుంది. కాబట్టి ఆదిలో అది సంక్రమణ స్థితుల సమితి T కి చెందిన ఏదైనా ఒక స్థితి i ($i \in T$) లో ఉందను కొందాము. సంక్రమణస్థితి నిర్వచనం ప్రకారం, ప్రక్రియ కొంత నిర్దిష్టకాలంలో T ని విడవడం సంభవం కాబట్టి ఇది జరిగే గరిష్ఠ నిర్దిష్ట కాలము n మెట్లు అయితే, అప్పుడు $P^{(n)}$ లోని ప్రతి పంక్తిలోను కనీసం ఒక్క మూలకం అయినా అశూన్య విలువకు సమానమవుతుంది. అంటే, ప్రతి $i \in T$, $j \notin T$ లకు సంబంధించి $p_{ij}^{(n)} > 0$ అవుతుంది. n గరిష్ఠ సంఖ్య కాబట్టి $p_{ij}^{(n)}$ సంభావ్యత ఒక సంఖ్య p ($0 < p < 1$) కంటె ఎక్కువగా ఉండేటట్లు p ని కనుకోగలము. అంటే, ప్రక్రియ n మెట్లలో T ని విడవదనే సంభావ్యత $1 - p$ కంటె తక్కువ కాబట్టి

$$\sum_{k \in T} p_{ik}^{(nr)} \leq 1-p \quad \forall\, i \in T$$

ఇంకా చాప్‌మెన్ — కొల్మొగ్రోవ్ సమీకరణము (2.1.4) ప్రకారం,

$$p_{ik}^{(nr)} = \sum_{k_1 \in T} \cdots \sum_{k_{r-1} \in T} p_{ik_1}^{(n)} \cdots p_{k_{r-1}k}^{(n)}.$$

దీనినిబట్టి,

$$\sum_{k \in T} p_{ik}^{(nr)} \leq (1-p)^r, \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\sum_{k \in T} p_{ik}^{(nr+m)} \leq (1-p)^r, \quad 0 \leq m < n$$

$$\therefore \quad p_{ij}^{(nr+m)} \leq (1-p)^r \quad \forall\, j \in T.$$

$$r \longrightarrow \infty \Rightarrow (1-p)^r \longrightarrow 0$$

కాబట్టి $$N \longrightarrow \infty \Rightarrow p_{ij}^{(N)} \longrightarrow 0 \qquad \forall\, i, j \in T.$$

దీనితో సిద్ధాంత నిరూపణ పూర్తి అవుతుంది.

*ఉపసిద్ధాంతము* 2.8.4 : పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలాలలో అన్ని స్థితులు సంక్రమణ స్థితులు కాజాలవు.

ఎందుచేతనంటే, $m\ (< \infty)$ సంక్రమణ స్థితులు గల మార్కోవ్ శృంఖలంలో ప్రతి n కు సంబంధించి $\sum_{j=0}^{m-1} p_{ij}^{(n)} = 1$. $n \to \infty$ అయితే $p_{ij}^{(n)} \to 0$ కాబట్టి ఈ విరుద్ధ ఫలితం దృష్ట్యా ఉప సిద్ధాంతం నిజమని గమనిద్దాము.

## 2.9 అవధి సంక్రమ సంభావ్యతలు (limit transition probabilities)

ఈ ప్రకరణంలో $n \to \infty$ అయినప్పుడు అవధిలో సంక్రమ సంభావ్యతలు $p_{ii}^{(n)}, p_{ij}^{(n)}$ $(i, j \in S)$ యొక్క అవధి విలువలను పరిశీలిద్దాము. ముందు $\{p_{ij}^{(n)}\}$, $\{f_{ij}^{(n)}\}$ అనే సంభావ్యతల అనుక్రమాలకు సంబంధించిన జనక ప్రమేయాలను చర్చిస్తాము. $i \neq j$ అయితే, $\{p_{ij}^{(n)}\}$ కు సంబంధించిన జనక ప్రమేయము

$$P_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} z^n \qquad \forall \; z < 1$$

$$= \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} z^n$$

(ఇక్కడ $i \neq j$ లేదా $i = j$ ప్రకారం, $\delta_{ij} = 0$ లేదా 1)

$(f_{ij}^{(n)})$ కు సంబంధించిన జనక ప్రమేయము

$$F_{ij}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} z^n \qquad \forall \; z < 1$$

ఇక్కడ $f_{ij}^{(0)} = f_{ii}^{(0)} = 0$ గా నిర్వచిస్తాము.

$i = j$ అయితే,

$$\left.\begin{aligned} P_{ii}(z) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} z^n \\ F_{ii}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} z^n \end{aligned}\right\} \qquad \ldots 2.8.1$$

$i \neq j$ అయినప్పుడు, (2.7.1) ప్రకారం,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{n} f_{ij}^{(r)} p_{jj}^{(n-r)} z^n$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=r}^{\infty} f_{ij}^{(r)} p_{jj}^{(n-r)} z^n$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} f_{ij}^{(r)} z^r \cdot \sum_{m=0}^{\infty} p_{jj}^{(m)} z^m$$

$$\therefore \; P_{ij}(z) - \delta_{ij} = F_{ij}(z) \cdot P_{jj}(z)$$

$i = j$ అయితే,

$$P_{ii}(z) - 1 = F_{ii}(z) P_{ii}(z)$$

లేదా $$P_{ii}(z) = [1 - F_{ii}(z)]^{-1};\ F_{ii}(z) = 1 - \{P_{ii}(z)\}^{-1} \qquad \ldots 2.9.2$$

గణిత విశ్లేషణలోని ఒక ఫలితాన్ని ఇక్కడ పేర్కొందాము.

ఫలితము **2.9.1 : $a_n \geq 0$ అయి $\{a_n\}$ అనే అనుక్రమాలకు సంబంధించిన జనక ప్రమేయము $A(z)$ అయితే,

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \forall\ z < 1.$$

$\underset{n \to \infty}{\text{Lt}} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} a_m = L$ అయ్యేటట్లు ఒక పరిమిత సంఖ్య L ఉండడానికి ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమము (necessary and sufficient condition)

$\underset{z \to 1}{\text{Lt}} (1 - z) A(z) = L$ అయ్యేటట్లు L ఉండవలె.

సిద్ధాంతము 2.9.2 : పునరావృత స్థితి j కు, ప్రతి స్థితి $i \in S$ కు సంబంధించి,

$$\text{(i)} \quad \underset{n \to \infty}{\text{Lt}} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{jj}^{(m)} = \frac{1}{\mu_j} \qquad \ldots 2.9.3$$

$$\text{(ii)} \quad \underset{n \to \infty}{\text{Lt}} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)} = f_{ij}^{*} \cdot \frac{1}{\mu_j} \qquad \ldots 2.9.4$$

నిరూపణ : నిర్వచనం ప్రకారం,

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)},\ F_{jj}'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} z^{n-1}$$

---

**దీని నిరూపణకు ఉత్సాహవంతులైన చదువరులు "Divergent series"–by G. H. Hardy (1949), theorem 96, page 155 ను సంప్రదించండి.

(2.9.2) ప్రకారం,

$$P_{jj}^*(z) = (1 - F_{jj}^*(z))^{-1} \text{ అనిన్నూ,}$$

(2.9.6) ప్రకారం,

$$P_{jj}^{(nd)} \longrightarrow \frac{1}{\mu_j^*} \text{ అని వ్రాయవచ్చు.}$$

ఇక్కడ,

$$\mu_j^* = \underset{z \to 1}{\mathrm{Lt}} \; F_{jj}^{*\prime}(z)$$

$$= \underset{z \to 1}{\mathrm{Lt}} \; F_{jj}^{\prime}\left(z^{\frac{1}{d}}\right)$$

$$= \underset{z \to 1}{\mathrm{Lt}} \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{d} f_{jj}^{(n)} z^{\frac{n}{d}-1}$$

$$= \frac{1}{d} \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} = \frac{\mu_j}{d}.$$

$$\therefore \quad p_{jj}^{(nd)} \longrightarrow \frac{d}{\mu_j} \qquad \ldots 2.9.7$$

లేదా, m ఏదైనా ధనపూర్ణాంకమై, d తో భాగింపదగినదయి, $m \to \infty$ అయితే,

$$p_{jj}^{(m)} \longrightarrow \frac{d}{\mu_j} \qquad \ldots 2.9.8$$

d తో భాగింపదగని ప్రతి పూర్ణాంకము $m > 0$ కు, $m \to \infty$ అయినప్పుడు,

$$p_{jj}^{(m)} \longrightarrow 0$$

(2.7.6), (2.9.6), (2.9.8) ల దృష్ట్యా, ఆవర్తితకాలము d గా గల j పునరావృత స్థితికి ప్రతి స్థితి $i \in S$ కు సంబంధించి, $n \to \infty$ అయితే,

$$p_{ij}^{(n)} \longrightarrow f_{ij}^* \cdot \frac{d}{\mu_j} \qquad \ldots 2.9.9$$

ఉప సిద్ధాంతము 2.9.4 : ప్రతి i స్థితికి సంబంధించి, స్థితి j సంక్రమణ స్థితి

గాని, పునరావృత సంశయ స్థితిగాని అయి, $n \to \infty$ అయినప్పుడు, $p_{ij}^{(n)} \to 0$. అవుతుంది.

j పునరావృత సంశయ స్థితి అయినప్పుడు, $\mu_j = \infty$ కాబట్టి $\frac{1}{\mu_j}$ విలువ శూన్యమని భావిస్తూ, పై సిద్ధాంతం సహాయంతో ఈ ఉప సిద్ధాంతం నిరూపణ అవుతుంది.

*సిద్ధాంతము* 2.9.5 : విడదీయలేమి పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలానికి సంబంధించిన స్థితి ఆవణంలో సంశయ స్థితులుగాని, లేదా సంక్రమణ స్థితులు గాని ఉండవు.

*నిరూపణ* : పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలం విడదీయరానిది అయితే, దాని స్థితి ఆవరణము S లోని స్థితులన్నీ ఒకదాని నొకటి ప్రవేశింపదగు స్థితులు కాబట్టి S ఒక సంవృత సమాచార తరగతి అవుతుంది. ఈ తరగతిలోని ఒక i స్థితి సంశయ లేదా సంక్రమణ స్థితి అయితే తరగతి ధర్మాల ప్రకారం S లోని స్థితులన్నీ సంశయ లేదా సంక్రమణ స్థితులు అవుతాయి. ఈ తరగతిలో i, j లు ఏ రెండు స్థితులు అయినప్పటికి $n \longrightarrow \infty$ అయితే పై ఉప సిద్ధాంతం దృష్ట్యా, $p_{ij}^{(n)} \longrightarrow 0$. కాని ప్రతి n కు సంబంధించి, $\sum_{j \in S} p_{ij}^{(n)} = 1$. అందుచేత $n \longrightarrow \infty$ అయితే లభించే విరుద్ధ ఫలితం దృష్ట్యా సిద్ధాంతం నిజమవుతుంది.

దీనినిబట్టి విడదీయలేమి పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలానికి సంబంధించిన స్థితి ఆవరణంలో స్థితులన్నీ నిస్సంశయ పునరావృత స్థితులేనని గ్రహించవచ్చు.

*సిద్ధాంతము* 2.9.6 : సంశయ లేదా నిస్సంశయ పునరావృత స్థితిగా ఉండడం తరగతి ధర్మమవుతుంది.

*నిరూపణ* : i, j అనే రెండు స్థితులు $i \longleftrightarrow j$ అయి, i స్థితి సంశయ లేదా నిస్సంశయ పునరావృత స్థితి అయితే, j స్థితి కూడా సంశయ లేదా నిస్సంశయ పునరావృత స్థితి అని నిరూపించవలె ఆవర్తిత లక్షణం తరగతి ధర్మం కాబట్టి i, j స్థితుల ఉమ్మడి ఆవర్తితకాలము d తో సూచిద్దాము. $i \longleftrightarrow j$ కాబట్టి $p_{ij}^{(n)} = \alpha > 0$, $p_{ji}^{(m)} = \beta > 0$ అయ్యేటట్లు ధన పూర్ణాంకాలు n, m ఉంటాయి. ప్రతి పూర్ణాంకాలు $s, r > 0$ కు చాప్‌మెన్-కొల్మొగ్రోవ్ సమీకరణం (2.3.8) ప్రకారం,

$$p_{ii}^{(n+sd+m)} \geq p_{jj}^{(n)}\, p_{jj}^{(sd)}\, p_{ji}^{(m)} = \alpha\beta .\, p_{ji}^{(sd)} > 0 \qquad (2.9\ 10)$$

ఇదేవిధంగా,

$$p_{jj}^{(m+rd+n)} \geq \alpha\beta .\, p_{ij}^{(rd)} > 0 \qquad (2\ 9.11)$$

మొదట్లో i స్థితి సంశయస్థితి అనుకొందాము. అప్పుడు

$$\underset{s \to \infty}{Lt} \; p_{ii}^{(n+sd+m)} = 0.$$

∴ (2.9.10) ప్రకారం,

$$\underset{s \to \infty}{Lt} \; p_{jj}^{(sd)} = 0$$

అంటే, i సంశయస్థితి అయితే j కూడా సంశయస్థితి అవుతుంది. ఇదేవిధంగా, i స్థితి నిస్సంశయ స్థితి అనుకొంటే (2.9.11) ప్రకారం,

$$\underset{r \to \infty}{Lt} \; p_{ii}^{(rd)} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \underset{r \to \infty}{Lt} \; p_{jj}^{(rd)} \neq 0.$$

అంటే i నిస్సంశయ స్థితి అయితే j కూడా నిస్సంశయ స్థితేనన్నమాట.

## 2.10 పరిమిత, అనంత మార్కోవ్ శృంఖలాలు :

ఆచరణలో చాలవరకు పునరావృత సంక్రమణ స్థితులు గల మార్కోవ్ శృంఖలాలు మాత్రమే మనకు ఎదురవుతాయి. వివిధ పునరావృత తరగతుల మధ్య ఎట్టి సంబంధం లేదు కాబట్టి ప్రక్రియ ఒక్కసారి పునరావృత తరగతిని ప్రవేశిస్తే, అప్పుడు దానిని గురించి ప్రత్యేక చర్చ జరపవచ్చు. ఇదేవిధంగా ప్రక్రియ సుదీర్ఘ కాలంలో సంక్రమణ తరగతిని విడవడం తథ్యంకాబట్టి సంక్రమణ తరగతులకు పునరావృత తరగతులు 'ప్రవేశింపదగు తరగతులు' (accessible classes) అవుతాయి. అందువల్ల ఆచరణలో కింద పేర్కొన్న మార్కోవ్ శృంఖలాలను మాత్రమే సమగ్రంగా చర్చించడం అనుచిత మవుతుంది అవి

(i) *పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలాలు :*

(a) పునరావృత, సంక్రమణ స్థితులు గల మార్కోవ్ శృంఖలాలు

(b) ఎర్గాడిక్ (ergodic) స్థితులు గల మార్కోవ్ శృంఖలాలు.

(ii) *గణనసాధ్యమై అనంత మార్కోవ్ శృంఖలాలు :*

(c) విడదీయలేమి అనావర్తిత మార్కోవ్ శృంఖలాలు.

*2.10.1 పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలాలు :* ఈ ప్రకరణంలో పరిమిత స్థితి ఆవరణంగల మార్కోవ్ శృంఖలాలకు సంబంధించి ఆచరణలో ఉపయోగపడే కొన్ని ఫలితాలను చర్చిస్తాము.

పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలాలకు సంబంధించిన స్థితి ఆవరణంలోని స్థితులన్నీ సంక్రమణ స్థితులు కాజాలవని ఉపసిద్ధాంతము (2.8.4) ద్వారా గ్రహించాము. అందుచేత ప్రస్తుత చర్చనీయాంశంగా ఒక సంక్రమణ తరగతినీ, ఒకటిగాని లేదా అంతకంటె ఎక్కువ సమాన పునరావృత తరగతులుగా వర్గీకరించగల స్థితి ఆవరణానికి సంబంధించిన పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలాలను పరిశీలిద్దాము.

m – స్థితులుగల స్థితి ఆవరణంలో పునరావృత స్థితులు r అనీ, సంక్రమణస్థితులు m - r అని అనుకొని, ఈ r పునరావృత స్థితుల తరగతిని C′ తోను, m - r సంక్రమణ స్థితుల తరగతిని C తోను సూచిద్దాము. ఈ మార్కోవ్ శృంఖలానికి సంబంధించిన సంక్రమణ సంభావ్యతా మాత్రిక P ని కింది విధిత రూపం (canonical form) లో వ్రాయవచ్చు.

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & O \\ R & Q \end{pmatrix}_{m \times m} \qquad (2.10.1)$$

ఇక్కడ $P_1$ = C′ లోని r స్థితుల మధ్య ఏర్పడే సంక్రమ సంభావ్యతలే మూలకాలు గాగల r × r మాత్రిక

Q = C లోని m - r స్థితుల మధ్య ఏర్పడే సంక్రమ సంభావ్యతలే మూలకాలుగాగల (m - r) × (m - r) మాత్రిక.

R = C లోని స్థితులనుంచి C′ లోని స్థితులను ప్రవేశించే సంక్రమ సంభావ్యతలే మూలకాలుగాగల (m - r) × r మాత్రిక.

స్థితి ఆవరణంలో పునరావృత, సంక్రమణ స్థితులుగల పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలాలకు సంబంధించి ముఖ్యంగా పరిశీలించ వలసిందేమంటే, ఆదిలో సంక్రమణ స్థితిలోనున్న ప్రక్రియ తుదకు పునరావృత స్థితిని ప్రవేశించడానికి పూర్వము, మరో సంక్రమణస్థితిని సగటున ఎన్నిసార్లు దర్శించవచ్చు ? ఆదిలో ఎద్రైనా i సంక్రమణ స్థితి (i ε C) నుంచి బయలుదేరి, తుదకు పునరావృతస్థితి j (i ε C′) ని ప్రవేశించే సంక్రమ సంభావ్యతలను గణించడంఎట్లా? ఈ ప్రశ్నలకు సమాధానంగా కింది సిద్ధాంతాన్ని ముందుగా నిరూపిద్దాము. ఇక్కడ $M = (I - Q)^{-1}$ అనే మాత్రికను ముఖ్యంగా ఉపయోగిస్తాం కాబట్టి దీనిని మౌలిక మాత్రిక (fundamental matix) అంటాము.

సిద్ధాంతము 2.10.1 : (2.10.1) లో వ్రాసిన P కి సంబంధించిన మార్కోవ్ శృంఖలంలో $M = (I - Q)^{-1}$ ఉండి, $M = \sum_{s=0}^{\infty} Q^s$ గా వ్రాయవచ్చు.

నిరూపణ : సామాన్య మాత్రికా గుణకారం ప్రకారం

$$(I - Q)(I + Q + Q^2 + \dots + Q^{n-1}) = (I - Q^n) \qquad (2.10.2)$$

$n \longrightarrow \infty$ అయితే అవధిలో సంక్రమణస్థితిని ప్రవేశించే సంభావ్యతలు సున్న కాబట్టి $Q^n$ లోని మూలకాలన్నీ విడివిడిగా శూన్యమవుతాయి కాబట్టి $Q^n \longrightarrow O_{(m-r)(m-r)}$ . $I - Q^n$ అనే నిర్ధారకము (determinant) విలువ అవధిలో $|I - Q^n| \longrightarrow 1$ . కాబట్టి, n యొక్క

బహుళ విలువకు సంబంధించి,

$$|I - Q^n| \neq 0$$

$$\therefore \quad |I - Q| \; |I + Q + Q^2 + \ldots + Q^{n-1}| \neq 0.$$

అంటే, $|I - Q| \neq 0 \Rightarrow (I - Q)^{-1}$ ఉంటుంది.

(2.10.2) ని రెండువైపుల $(I - Q)^{-1}$ చే గుణిస్తే,

$$I + Q + Q^2 + \ldots + Q^{n-1} = (I - Q)^{-1} (I - Q^n).$$

$n \longrightarrow \infty$ అయితే, అవధిలో $Q^n \longrightarrow 0$ కాబట్టి,

$$I + Q + Q^2 + \ldots\ldots = (I - Q)^{-1} = M.$$

తుదకు పునరావృత స్థితిని ప్రవేశించడానికి పూర్వము ఆదిలో i సంక్రమణ స్థితి ($i \in C$) లో ఉండి, మరో సంక్రమణస్థితి j ($j \in C$) ని ప్రవేశించిన మొత్తం సార్లను $N_{ij}$ తో సూచిస్తే, $N_{ij}$ ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి అవుతుంది. $m_{ij} = E(N_{ij})$ అయితే, i సంక్రమణస్థితి నుంచి మరో j సంక్రమణ స్థితిని సగటున ఎన్నిసార్లు ప్రవేసించేది $m_{ij}$ తెలుపుతుంది.

సిద్ధాంతము 2.10.2 : ప్రతి $i, j \in C$ లకు సంబంధించి,

$$M = (m_{ij}) \qquad (2.10.3)$$

నిరూపణ : ఆదిలో మార్కోవ్ శృంఖలం i స్థితి ($i \in C$) లో ఉందనుకోండి. మొదటి మెట్టులోనే ఏదైనా పునరావృతస్థితి k ($k \in C'$) ని $\sum_{k \in C'} p_{ik}$ సంభావ్యతతో ప్రవేశించగలిగితే, $N_{ij} = 0$, $i \neq j$. $j \in C$. కాని ముందుగా i స్థితి నుంచి $l$ స్థితి ($l \in C$) ని ప్రవేశించి, దానినుంచి j స్థితిని సందర్శించిన సార్లు $N_{lj}$ కు సమానము. $i = j$ అయితే, j స్థితిని ప్రవేశించినసార్లు $N_{lj} + \delta_{ij}$ కు సమానము. ఇక్కడ $i \neq j$ లేదా $i = j$ ప్రకారం $\delta_{ij} = 0$ లేదా $= 1$ అవుతుంది.

$$\therefore \quad N_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & \sum_{k \in C'} P_{ik} \text{ సంభావ్యతతో} \\ N_{lj} + \delta_{ij}, & P_{il} \text{ సంభావ్యతతో } (l \in C). \end{cases}$$

$$\therefore \quad E(N_{ij}) = \sum_{k \in C'} p_{ik} \cdot \delta_{il} = \sum_{l \in C} p_{il} E(N_{lj} + \delta_{ij})$$

అంటే, $$m_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{l \varepsilon C} p_{il} m_{lj}$$

మాత్రికా రూపంలో, $$(m_{ij}) = I + Q\,(m_{ij})$$

లేదా, $$(m_{ij}) = (I - Q)^{-1} = M.$$

పై సంఖ్య $N_{ij}$, తుదకు పునరావృత స్థితిని ప్రవేశించిక పూర్వము ప్రక్రియ సంక్రమణ స్థితిని ప్రవేశించిన సార్లను తెలుపుతుంది. కాని ఇది కాకుండా, పునరావృత స్థితిని ప్రవేశించక పూర్వం ప్రక్రియ సంక్రమణ స్థితులను మాత్రమే ఎన్నిసార్లు సగటుని ప్రవేశిస్తుందో తెలుసుకోవలెనని ఉత్సాహముంటే $N_i = \sum_{j \varepsilon C} N_{ij}$ అనే యాదృచ్ఛిక చలరాశిని పరిశీలించవలసి ఉంటుంది.

సిద్ధాంతము 2.10.3: $M_1 = (m_i)_{(m-r)\times 1}$, $\left(m_i = \sum_{j \varepsilon C} m_{ij}\right)$ అనేది ఒక దొంతి మాత్రిక అయితే,

$$(m_i) = \left(E\,(N_i)\right) = M_1,\ i \varepsilon C$$

నిరూపణ: ఇక్కడ $E\,(N_i) = m_i,\ \forall\, i \varepsilon C$

$$\therefore \quad m_i = \sum_{j \varepsilon C} E\,(N_{ij}) = \sum_{i \varepsilon C} m_{ij}.$$

మాత్రికా రూపంలో $$(m_i) = \left(\sum_{j \varepsilon C} m_{ij}\right).$$

ఉదాహరణకు, యాదృచ్ఛిక నడకకు సంబంధించిన కింది సంక్రమ సంభావ్యతా మాత్రిక P ని పరిశీలించండి.

| స్థితి | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | q | 0 | p | 0 | 0 |
| P = 2 | 0 | q | 0 | p | 0 |
| 3 | 0 | 0 | q | 0 | p |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

ఇక్కడ 1, 2, 3 స్థితుల సమితి సంక్రమణ తరగతి C అవుతుంది. కాబట్టి ఈ స్థితుల మధ్యగల సంక్రమ సంభావ్యతలే మూలకాలుగా గల మాత్రిక

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad I - Q = \begin{pmatrix} 1 & -p & 0 \\ -q & 0 & -p \\ 0 & -q & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = (I - Q)^{-1} = \frac{1}{p^2 + q^2} \begin{pmatrix} p + q^2 & p & q^2 \\ q & 1 & p \\ q^2 & q & q + p^2 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \Big( \sum_{j \varepsilon C} m_{ij} \Big)_{3 \times 1} = \frac{1}{p^2 + q^2} \big(q^2 + p(2+p), \; 2p^2 + q(2+q)\big),$$

ప్రత్యేకించి, $p = \frac{2}{3}$ అయినప్పుడు,

$$M = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 3 & 9 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} ; \; M_1 = \frac{1}{5} (17 \;\; 18 \;\; 11)'.$$

సంక్రమణ తరగతి C ని వదలి, మార్కోవ్ శృంఖలం తుదకు ఏదైనా పునరావృత స్థితిని ప్రవేశించే సంభావ్యతలను కనుక్కొనే విధానాన్ని ఇప్పుడు పరిశీలిద్దాము. గ్రహించవలసిన మరో విషయమేమంటే మార్కోవ్ శృంఖలం తుదకు ఏ పునరావృత స్థితిని ప్రవేశించిందోనన్నది. ఆ స్థితి విలీన స్థితి అయితే తదనంతరం ప్రక్రియ ఆ స్థితిలోనే విలీనమవుతుంది.

ప్రక్రియ i సంక్రమణ స్థితి ($i \varepsilon C$) నుంచి ఆదిలో బయలుదేరి ఏదైనా పునరా

వృత స్థితి k ($k \in C'$) ని ప్రవేశించే సంభావ్యతను $f_{ik}$ తో సూచించి, ఈ కింది సిద్ధాంతాన్ని నిరూపిద్దాము.

*సిద్ధాంతము* 2.10.4 : M, R లు (2.10.1) లో పేర్కొన్న మాత్రికలే అయితే,

$$F = (f_{ik})_{(m-r)\times r} = MR, \; i \in C, \; k \in C' \qquad \ldots 2.10.4$$

*నిరూపణ* : మార్కోవ్ శృంఖలం ప్రథమ మెట్టులోనే i సంక్రమణ స్థితి ($i \in C$) నుండి k పునరావృత స్థితి ($k \in C'$) ని ప్రవేశిస్తే, $f_{ik} = p_{ik}$ అవుతుంది. లేకపోతే, మరో j సంక్రమణ స్థితి ($j \in C$) ని ముందు ప్రవేశించి, తదనంతరం k ని ప్రవేశిస్తే,

$$f_{ik} = p_{ik} + \sum_{j \in C} p_{ij} f_{jk} \qquad (i, j \in C; \; k \in C')$$

మాత్రికా రూపంలో

$$F = R + QF$$

లేదా

$$F = (1 - Q)^{-1} R = MR.$$

*ఉపసిద్ధాంతము* 2.10.5 : R లోని k వ దొంతిని $R_k$ తో సూచిస్తే, C లోని సంక్రమణ స్థితుల నుంచి $k \in C'$ ని ప్రవేశించే సంభావ్యతలు $MR_k$ కు సమానమవుతాయి.

పై ఉదాహరణలో,

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \; (p = \tfrac{2}{3})$$

$$M = \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 3 & 9 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad F = MR = \tfrac{1}{15} \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 12 \\ 1 & 14 \end{pmatrix}$$

*2.10.2 ఎర్గాడిక్* (ergodic) *స్థితులతో విడదీయలేమి పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలాలు :* అనావర్తిత, నిస్సంశయ పునరావృత స్థితిని ఎర్గాడిక్ స్థితిగా నిర్వచించాము. పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలం 'విడదీయ లేమి' దయితే, దానికి సంబంధించిన స్థితి ఆవరణం లోని స్థితులన్నీ నిస్సంశయ పునరావృత స్థితులని ఇదివరకే స్పష్టీకరించాము. ఎర్గాడిక్ స్థితులుగల విడదీయలేమి పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలంలో n అనంతమైనప్పుడు సంక్రమ సంభావ్యతల యొక్క అవధి విలువల నిర్ధారణను మనం ప్రస్తుతం చర్చిస్తాము. ఈ అవధి సంభావ్యతలను నిర్ధారణ చేసే కింది సిద్ధాంతాన్ని ఎర్గాడిక్ సిద్ధాంతమని, అవధి సంభావ్యతలను ఎర్గాడిక్ సంభావ్యతలనీ పిలుస్తారు.

ఎర్గాడిక్ సిద్ధాంతము 2.10.6 : ఎర్గాడిక్ స్థితులుగల విడదీయలేమి m-స్థితుల పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలం యొక్క సంక్రమ సంభావ్యతా మాత్రిక P అయితే,

(i) $$\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}}\; P^{(n)} = \underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}}\; P^{n} = \Pi = (\pi\ \pi\ \ldots\ \pi)' \qquad \ldots 2.10.5$$

ఇక్కడ $\pi = (\pi_1\ \pi_2\ \ldots\ \pi_m),\ 0 < \pi_j < 1,\ j = 1, 2, \ldots, m.$

(ii) $$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1.$$

*నిరూపణ :* (2.10.5) ని నిరూపించడానికిగాను m — స్థితుల ఆవరణంలోని ఏ రెండు స్థితులు i, j కు అయినా, $\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}}\; p_{ij}^{(n)} = \pi_j$. అయ్యేటట్లు ఒక వాస్తవ సంఖ్య $\pi_j$ ఉంటుందని రుజువు చేయవలె. ఇందుకుగాను, $P^{(n)}$ లోని j-వ దొంతిలోని కనిష్ఠ, గరిష్ఠ విలువలను $m_j^{(n)}$, $M_j^{(n)}$ లతో సూచిస్తే, $0 < m_j^{(n)} \le M_j^{(n)} < 1$. చాప్‌మెన్-కాల్మొగ్రోవ్ సమీకరణం (2.3.8) ద్వారా ప్రతి j స్థితికి,

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}\, p_{kj}^{(n)} \le M_j^{(n)} \sum_{k=1}^{m} p_{ik} = M_j^{(n)}.$$

$$\therefore \qquad M_j^{(n+1)} \le M_j^{(n)}$$

ఇదేవిధంగా, $$m_j^{(n+1)} \ge m_j^{(n)}.$$

దీనినిబట్టి, $\{m_j^{(n)}\}$ అనేది ఆరోహణ ఏకదిష్ట అనుక్రమమనీ, $\{M_j^{(n)}\}$ అవరోహణ ఏకదిష్ట అనుక్రమమనీ గ్రహించవచ్చు. ఈ అనుక్రమాల అవధులు ఉండాలి కాబట్టి వాటిని $m_j$, $M_j$ లతో సూచిస్తే,

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}}\; m_j^{(n)} = m_j\ ;\ \underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}}\; M_j^{(n)} = M_j.$$

ఇప్పుడు ఈ రెండు అవధులు సమానమని చూపగలిగితే, (అప్పుడు $m_j = M_j = \pi_j$ అనుకొంటే) $\underset{n \to \infty}{\text{Lt}}\, p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ అవుతుంది. దీనికిగాను, $d_j^{(n)} = M_j^{(n)} - m_j^{(n)}$ లను పరిశీలించండి. $\underset{n \to \infty}{\text{Lt}}\, d_j^{(n)} = 0$ అయితే, సిద్ధాంతం నిరూపించినట్లే. ఇప్పుడు,

$$d_j^{(n+1)} = M_j^{(n+1)} - m_j^{(n+1)}$$

$$d_j^{(n+1)} - d_j^{(n)} = M_j^{(n+1)} - M_j^{(n)} - \left(m_j^{(n+1)} - m_j^{(n)}\right) < 0$$

$\therefore \{d_j^{(n)}\}$ అనేది అవరోహణ ఏకదిష్ట అనుక్రమమవుతుంది. ఎర్గాడిక్ స్థితులుగల 'విడదీయలేమి' m స్థితుల మార్కోవ్ శృంఖలానికి ఏ i, j లకు అయినా, $p_{ij}^{(N)} > 0$ అయ్యేటట్లు ధనపూర్ణాంకము N ఉంటుంది కాబట్టి సంక్రమ సంభావ్యతా మాత్రిక $P^{(N)}$ లోని కనిష్ఠ మూలకాన్ని $\lambda$ తో సూచిస్తే, $\lambda > 0$. ప్రతి i కి

$$p_{ij}^{(\overline{n+1}\,N)} = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}^{(N)}\, p_{kj}^{(nN)}$$

కాని $p_{ij}^{(\overline{n+1}N)} = M_j^{(\overline{n+1}N)}$ అయ్యేటట్లు i ని ఎన్నుకోగలము.

అదేవిధంగా $p_{k'j}^{(nN)} = m_j^{(nN)}$ అయ్యేటట్లు $k'$ ని ఎన్నుకోవచ్చు.

$$\therefore\quad M_j^{(\overline{n+1}\,N)} = p_{ik'}^{(N)}\, p_{k'j}^{(nN)} + \sum_{k \neq k'} p_{ik}^{(N)}\, p_{kj}^{(nN)}$$

$$\leq p_{ik'}^{(N)}\, m_j^{(nN)} + M_j^{(nN)} \sum_{k \neq k'} p_{ik}^{(N)}$$

$$\leq p_{ik'}^{(N)}\, m_j^{(nN)} + M_j^{(nN)} \left(1 - p_{ik'}^{(N)}\right)$$

$$= M_j^{(nN)} - \left\{M_j^{(nN)} - m_j^{(nN)}\right\} p_{ik'}^{(N)}$$

$$\leq M_j^{(nN)} - d_j^{(nN)}.\lambda \quad (\because \lambda = p_{ij}^{(N)} \text{ల కనిష్ఠ విలువ})$$

ఇదే విధంగా $p_{ij}^{(\overline{n+1}N)} = m_j^{\overline{n+1}\,N}$, $p_{k'j}^{(nN)} = M_j^{(nN)}$ అయ్యేటట్లు $i, k'$ లను ఎన్నుకొంటే,

$$m^{(\overline{n+1}\,N)} \geq m_j^{(nN)} + d_j^{(nN)} \cdot \lambda_j$$

$$\therefore \quad M_j^{(\overline{n+1}\,N)} - m_j^{(\overline{n+1}\,N)} \leq d_j^{(nN)} \cdot \left(1 - 2\lambda\right)$$

అంటే, $$d_j^{(\overline{n+1}\,N)} \leq d_j^{(nN)} \left(1 - 2\lambda\right)$$

ప్రత్యేకించి, $$d_j^{(2N)} \leq d_j^{(N)} \left(1 - 2\lambda\right)$$

$$d_j^{(3N)} \leq d_j^{(2N)} \left(1 - 2\lambda\right)$$

$$\leq d_j^{(N)} \left(1 - 2\lambda\right)^2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$d_j^{(\overline{n+1}\,N)} \leq d_j^{(N)} \left(1 - 2\lambda\right)^n$$

$\left(1 - 2\lambda\right) < 1$ అయితే, అంటే $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ అయి, $n \longrightarrow \infty$ అయినప్పుడు $d_j^{(nN)} \longrightarrow 0$. అంటే, $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ అయితే, $d_j^{(n)} \longrightarrow 0$.

ప్రతి $n = 1, 2, 3, \ldots$ కు,

$$0 < m_j^{(n)} \leq \pi_j \leq M_j^{(n)} < 1$$

కాబట్టి $0 < \pi_j < 1$, $j = 1, 2, 3, \ldots, m$. ఇంకా ప్రతి n కు సంబంధించి $\sum_{j=1}^{m} p_{ij}^{(m)} = 1$. $n \longrightarrow \infty$ అయినప్పుడు, అవధిలో $\sum_{j=1}^{m} \pi_j = 1$. దీనితో సిద్ధాంతాన్ని నిరూపించినట్లే.

అవధి సంభావ్యత $\pi_j$, ఆదిలో మార్కోవ్ శృంఖలం ఏ i స్థితినుండి బయలు దేరిందో ఆ i స్థితి పై ఆధారపడదని గమనించవచ్చు. i, j లు సమాచార పునరావృత స్థితులు అయితే, (2.9.6) ,సిద్ధాంతం (2.7.2) ప్రకారం,

$$\underset{n \longrightarrow \infty}{\mathrm{Lt}} \; p_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{*} \cdot \frac{1}{\mu_j} = \frac{1}{\mu_j}$$

పై ఎర్గాడిక్ సిద్ధాంతం దృష్ట్యా $\mu_j = \frac{1}{\pi_j}$. దీనినిబట్టి అవధి సంభావ్యతలు తెలిస్తే, పునరావృత స్థితి i నుంచి మరో పునరావృతస్థితి j ని ప్రథమంగా ప్రవేశించడానికి సగటున పట్టు ప్రథమ ప్రవేశకాలాన్ని నిర్ణయించవచ్చు. j యొక్క ఆవర్తన కాలము d అయితే, $\mu_j = \frac{d}{\pi_j}$ అవుతుంది.

నిర్వచనము 2.10.7 : $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$ అయి, $p = (p_1\, p_2 \dots p_m)$ అనేది సంభావ్యతా సదిశ (probability vector) అనుకోండి. ఏదైనా m స్థితులుగల పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలంలోని సంక్రమ సంభావ్యతా మాత్రిక P కి సంబంధించి

$$p = pP \qquad \dots 2.10.6$$

అనే సమకాలిక ఏకఘాత సమీకరణాలు (simultaneous linear equations) ఉంటే, సంభావ్యతా విభాజనము $\{p_j,\ j = 1, 2, \dots, m\}$ ను స్థావర విభాజనము (stationary distribution) అంటారు.

(2.10.6) దృష్ట్యా, ప్రతి j స్థితికి,

$$p_j = \sum_{i=1}^{m} p_j\, p_{ij} \qquad \dots 2.10.7$$

p స్థావర విభాజనమయితే, (2.10.7) నుండి,

$$p_j = \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{k=1}^{m} p_k\, p_{ki} \right) p_{ij}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} p_k \sum_{i=1}^{m} p_{ki}\, p_{ij}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} p_k\, p_{kj}^{(2)} \qquad (\because (2.3.8))$$

సార్వత్రీకరించి వ్రాస్తే, ప్రతి $n = 1, 2, 3, \dots$ కు,

$$p_j = \sum_{k=1}^{m} p_k\, p_{kj}^{(n)} \qquad \dots 2.10.8$$

(2.10.6) నిజమయితే. (2.10.7), (2.10.8) ల దృష్ట్యా, ప్రతి $n = 1, 2, 3, \dots$ కు,

$$p = p\, P^{(n)} = p\, P^{n} \qquad \dots 2\ 10.9$$

అవుతుంది. ప్రక్రియ యొక్క ఆది విభాజనము (initial distribution)

$$P(X_0 = j) = p_j^{(0)},\ j = 1, 2, \ldots, m\ ;\ p_j^{(0)} \geq 0,\ \sum_{j=1}^{m} p_j^{(0)} = 1$$

స్థావర విభాజనమనుకొంటే,

ie
$$p_j^{(0)} = \sum_{i=1}^{m} p_i^{(0)} p_{ij} = \sum_{i=1}^{m} p_i^{(0)} p_{ij}^{(n)}$$

ప్రతి $n = 1, 2, 3, \ldots$ కు

$$p_j^{(n)} = P(X_n = j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} P(X_0 = i,\ X_n = j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} p_i^{(0)} p_{ij}^{(n)} = p_j^{(0)}$$

ప్రక్రియ యొక్క ఆది విభాజనము స్థావర విభాజనమని తెలిస్తే, దాని n వ మెట్టు విభాజనం ఆది విభాజనంతో ఏకీభవిస్తుంది. ఇటువంటి ప్రక్రియ యొక్క పరమ విభాజనము కాల గమనము n పై ఆధార పడనందున ఇది స్థావర ప్రక్రియ అవుతుంది.

ఎర్గాడిక్ స్థితులతో విడదీయలేమి పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలానికి సంబంధించిన అవధి విభాజనము $\left\{\pi_j,\ i = 1, 2, 3, \ldots, m\ ;\ \pi_j \geq 0,\ \sum \pi_j = 1\right\}$ ఏకైక స్థావర విభాజనము (unique stationary distribution) అని కింది సిద్ధాంతం ద్వారా గ్రహించవచ్చు.

సిద్ధాంతము 2.10.8 : ఎర్గాడిక్ స్థితులతో విడదీయలేమి పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలం యొక్క సంక్రమ సంభావ్యతా మాత్రిక P అయితే, $\sum_{j=1}^{m} \pi_j = 1;\ \Pi P = \Pi$ లేదా $P\,\Pi = \Pi$ అయ్యేటట్లు ఒకేఒక అవధి సంభావ్యతా సదిశ $\pi = (\pi_1\ \pi_2 \ldots \pi_m)$ ఉంటుంది. ఇక్కడ $\Pi = (\pi\ \pi\ \ldots\ \pi)'_{m+1}$.

నిరూపణ : సిద్ధాంతం (2.10.6) ద్వారా

$$\underset{n \to \infty}{Lt}\ P^n = \Pi$$

దీనినిబట్టి,
$$\underset{n \to \infty}{Lt} P^{n+1} = \Pi$$

అంటే,
$$\underset{n \to \infty}{Lt} P^n . P = \Pi$$

లేదా
$$\Pi P = \Pi$$
ఇదేవిధంగా,
$$P \Pi = \Pi$$
అవుతుంది. ...2 10 10

(2.10.6), (2.10.10) ల దృష్ట్యా $\{\pi_j, j = 1, 2, 3, \ldots, m\}$ అనే అవధి విభాజనము స్థావర విభాజమని రుజువు అయింది. ఇప్పుడు ఇది ఏకైక విభాజనమని చూపడానికి,

$$\sum_{j=1}^{m} \nu_j = 1, \nu_j = \sum_{i=1}^{m} \nu_i p_{ij} \qquad \ldots 2.10.11$$

లేదా $V = V P$, $(V = (v, v \ldots v)'_{m \times 1} ; v = (\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_m))$

అయ్యేటట్లు మరో సంభావ్యత సదిశ v ఉందనుకొందాము.

కాని
$$\underset{n \to \infty}{Lt} v P^n = \pi \text{ లేదా } v \Pi = \pi \qquad \ldots 2.10.12$$

(2.10.11) ద్వారా,

$$\nu P = \nu$$

$$\nu P^2 = \nu P . P = \nu . P = \nu$$

$$\vdots$$

$$\nu P^n = \nu$$

కాబట్టి,
$$\underset{n \to \infty}{Lt} \nu P^n = \nu. \qquad \ldots 2.10.13$$

(2.10.12), (2.10.13) ల నుంచి, $\nu = \pi$ అని స్పష్టమవుతుంది. పై చర్చద్వారా $\pi P^n = \pi$ కాబట్టి $\pi = (\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_m)$ అనేది స్థావర విభాజన మని కూడా స్పష్టమయింది.

P తెలిస్తే, $\pi = \pi P$ అనే సమకాలిక ఏకఘాత సమీకరణాల ద్వారా పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలం యొక్క అవధి విభాజనాన్ని నిర్ణయించవచ్చు. ఉదాహరణకు, 3-స్థితులుగల మార్కోవ్ శృంఖలం యొక్క సంక్రమ సంభావ్యతా మాత్రిక

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

అయితే, అవధి విభాజనము $\pi = (\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3)$ ను సాధించడానికి ఉపయోగించే సమ కాలిక ఏకఘాత సమీకరణాలు $\pi = \pi P$. అంటే,

$$(\pi_1 \pi_2 \pi_3) = (\pi_1 \pi_2 \pi_3) \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 = \frac{3}{8}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3$$

$$\pi_2 = \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{1}{8}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3$$

$$\pi_3 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2$$

వీటికి తోడు $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ అనే నియమాన్ని కూడా ఉపయోగించి, కింది స్వతంత్ర సమీకరణాల ద్వారా $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$, లను సాధిస్తే,

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

$$4\pi_1 - 9\pi_2 + 8\pi_3 = 0$$

$$2\pi_1 + 3\pi_2 - 6\pi_3 = 0$$

వచ్చే అవధి సంభావ్యతలు $\pi_1 = 0.3$, $\pi_2 = 0.4$, $\pi_3 = 0.3$.

*2.10.3 అనంత మార్కోవ్ శృంఖలాలు* : ఏ మార్కోవ్ శృంఖలానికి సంబంధించిన స్థితి ఆవరణంలో గణనసాధ్యమై అనంత సంఖ్యలో స్థితులుంటే, ఆ మార్కోవ్ శృంఖలాన్ని మామూలుగా అనంత మార్కోవ్ శృంఖలము (Infinite Markov chain) అనడం పరిపాటి. సైద్ధాంతరీత్యా, పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలాలకు, అనంత మార్కోవ్ శృంఖలాలకు మధ్య చెప్పుకోదగ్గ భేదం లేకపోయినా, అవధిలో అవి ప్రవర్తించే తీరులో భేదం కానవస్తుంది. ఉదాహరణకు, పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలానికి సంబంధించినంతవరకు అన్ని స్థితులు సంక్రమణ స్థితులు కాజాలవని తెలుసు. కాని స్థితి ఆవరణంలోని స్థితులసంఖ్య గణనీయంగా అనంతమైనప్పుడు అవధిలో ప్రక్రియ ఏవైనా పరిమితమై అభిన్నమైన స్థితులలో అనుకోవడం సమంజసమవుతుంది. పరిమిత శృంఖలాలకు సంబంధించి నిరూపించిన లక్షణాలే

ఉండదని అనంత మార్కోవ్ శృంఖలాలకు కూడా దాదాపు వర్తిస్తాయి కాబట్టి ఈ ప్రకరణంలో ఆ సాదృశ లక్షణాలను గురించి మాత్రమే ప్రస్తావించడం జరుగుతుంది. ఇది కూడా పునరావృత స్థితులతో విడదీయలేమి అనావర్తిత మార్కోవ్ శృంఖలాలకు సంబంధించి అవధిలో వాటి ప్రవర్తనలను గురించిన విషయాలకు మాత్రమే పరిమితమవుతుంది.

సిద్ధాంతము 2.10.9 : అనంత మార్కోవ్ శృంఖలంలో $i$ ఏదైనా అనావర్తిత పునరావృత తరగతికి చెందిన స్థితి అయి, $p_{ii}^{(n)}$ $n$ వ మెట్టులో $i \longleftrightarrow i$ చెందే సంభావ్యత; $\mu_i$, సగటు నిరీక్షణాకాలముమయితే,

$$\underset{n \to \infty}{\mathrm{Lt}}\; p_{ii}^{(n)} \text{ ఉంటూ, } \underset{n \to \infty}{\mathrm{Lt}}\; p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i} \qquad \ldots 2.10.14$$

ఇదేవిధంగా $i$, $j$ స్థితులు ఒకే సమాచార తరగతికి చెందిన స్థితులయితే,

$$\underset{n \to \infty}{\mathrm{Lt}}\; p_{ji}^{(n)} = \underset{n \to \infty}{\mathrm{Lt}}\; p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i} \qquad \ldots 2.10.15$$

సిద్ధాంతము (2.9.2) యొక్క నిరూపణ దృష్ట్యా (2.10.14), (2.10.15) లను నిరూపించడం కష్టంకాదు.

ఉప సిద్ధాంతము 2.10.10 : $i$ స్థితి నిస్సంశయ పునరావృత స్థితి అయితే, $\underset{n \to \infty}{\mathrm{Lt}}\; p_{ii}^{(n)} = \pi_i > 0$ ; $i$ స్థితి సంశయ పునరావృత స్థితి అయితే, $\underset{n \to \infty}{\mathrm{Lt}}\; p_{ii}^{(n)} = 0$.

నిర్వచనం ప్రకారం $i$ స్థితి నిస్సంశయ లేదా సంశయ పునరావృత స్థితి అయిన ప్రకారం, $\mu_i < \infty$ లేదా $= \infty$ అవుతుంది కాబట్టి $\pi_i = \dfrac{1}{\mu_i}$ అనుకొంటే, ఈ ఉప సిద్ధాంతాన్ని నిరూపించినట్లే.

ఫలితాలు 2.10.11 : సిద్ధాంతము (2.10.9) ఉపయోగించి కింది రెండు అవధులు నిరూపించవచ్చు. ఇందులోని నియమాలననుసరించి,

$$\underset{n \to \infty}{\mathrm{Lt}}\; \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{ii}^{(m)} = \frac{1}{\mu_i} \qquad \ldots 2.10.16$$

$i \longleftrightarrow j$ అయితే,

$$\underset{n \to \infty}{\mathrm{Lt}}\; \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)} = \frac{1}{\mu_j} \qquad \ldots 2.10.17$$

(2.10.16), (2.10.17) లను సెసారో (Cesaro) అవధులు అనడం పరిపాటి.

కింది విధంగా నిర్వచించిన సూచిక యాదృచ్ఛిక చలరాశి $Y_{ij}^{(m)}$ ని పరిశీలిద్దాము.

$$Y_{ij}^{(m)} = \begin{cases} 1, & X_0 = i \text{ అని తెలిసిన పిదప } X_m = j \\ 0, & X_0 = i \quad ,, \quad X_m \neq j \end{cases} \qquad \ldots 2.10.18$$

స్పష్టంగా,
$$P\left(Y_{ij}^{(m)} = 1\right) = P\left(X_m = j \; X_0 = i\right) = p_{ij}^{(m)}$$
$$P\left(Y_{ij}^{(m)} = 0\right) = 1 - p_{ij}^{(m)}.$$
$$E\left(Y_{ij}^{(m)}\right) = p_{ij}^{(m)}$$

ఇక్కడ $\sum_{m=1}^{n} Y_{ij}^{(m)}$ ఆదిలో ప్రక్రియ i స్థితిలో ఉండి, n మెట్లలో j స్థితిని సందర్శించిన మొత్తం పర్యాయాలను తెలుపుతుంది. ఆదిలో i స్థితి నుంచి బయలుదేరి మొదటి n మెట్లలో మార్కోవ్ శృంఖలం తిరిగి i స్థితిని సగటున తిరిగి ప్రవేశించిన పర్యాయాలు $\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{ii}^{(m)}$ అవుతుంది. ఇదే విధంగా, j స్థితిని సగటున ప్రవేశించిన పర్యాయాల సంఖ్య $\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)}$ అవుతుంది. $n \longrightarrow \infty$ అయినప్పుడు, పై నియమాలు ప్రకారం అవధిలో ప్రక్రియ ఆదిస్థితి i తో సంబంధం లేకుండా ప్రవర్తిస్తుంది కాబట్టి ఈ చర్చను పై ఫలితాలు అనుసరిస్తాయి.

పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలాలలోవలె, ఇక్కడ కూడా $\pi_i$ ని అనంతకాలంలో ప్రక్రియ i స్థితిలో ఉండే అవధి సంభావ్యత అని పిలుస్తాము. కింది సిద్ధాంతం ద్వారా అవధి సంభావ్యతల మధ్యగల ముఖ్య లక్షణాలను గ్రహించవచ్చు.

సిద్ధాంతము 2.10.12: C ఏదైనా ఒక అనావర్తిత, పునరావృత తరగతి అయి, $\underset{n \to \infty}{Lt}\; p_{ii}^{(n)} = \pi_i > 0$ అయ్యేటట్లు C లో ఒక స్థితి i ఉంటే, $\pi_j > 0$ అయ్యేటట్లు C లో మరో j స్థితి ఉంటుంది.

ఎందువల్లనంటే, $i \longrightarrow j$ కాబట్టి $p_{ij}^{(n)} = \alpha > 0$, $p_{ji}^{(m)} = \beta > 0$ అయ్యేటట్లు పూర్ణాంకాలు $n, m > 0$ ఉంటాయి. చాప్‌మెన్ - కొల్మొగ్రోవ్ సమీకరణం 2.3.8 ద్వారా

$$p_{jj}^{(m+r+n)} \geq p_{ji}^{(m)}\, p_{ii}^{(r)}\, p_{ij}^{(n)} = \alpha\beta\, p_{ii}^{(r)}$$

$r \longrightarrow \infty$ అయినప్పుడు అవధిలో

$$\pi_j \geq \alpha\beta\, \pi_i > 0.$$

ఇప్పుడు ఎర్గాడిక్ స్థితులతో విడదీయలేమి అనంత మార్కోవ్ శృంఖలం యొక్క అవధి విభాజనాన్ని నిర్ణయించే విధానాలను కింది సిద్ధాంతం ద్వారా నెలకొల్పుదాము.

సిద్ధాంతము 2.10.13 : ఎర్గాడిక్ స్థితులతో విడదీయలేమి మార్కోవ్ శృంఖలానికి సంబంధించిన అవధి సంభావ్యతలు $\pi_i$, $i = 0, 1, \ldots \infty$ అయితే,

$$\left.\begin{aligned} \pi_j &= \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i\, p_{ij},\; j = 0, 1, 2, \ldots \\ \Sigma \pi_j &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots 2.10.19$$

ఈ అవధి విభాజనము $\{\pi_j = 0, 1, 2, \ldots\}$ స్థావర విభాజనము కూడా.

సిద్ధాంతము (2.10.13) పరిమిత మార్కోవ్ శృంఖలానికి నిరూపించిన సిద్ధాంతానికి సార్వత్రిక ఫలితమవుతుంది. అనంత సంఖ్యలో ఉన్న అజ్ఞాత విలువలు $\pi_j$ కోసము అనంత సంఖ్యలోని సమకాలిక ఏకఘాత సమీకరణాలను సాధించడం అసంభవం కాబట్టి $\pi_j$ లను నిర్ణయించడానికి (2.10.18) ని సూటిగా ఉపయోగించజాలము, కాని ఈ సమీకరణాలను ఉపయోగించి సంభావ్యత జనక ప్రమేయాలను కనుక్కొని, వాటి ద్వారా అవధి విభాజనాలను నిర్ణయించవచ్చు. ఇంక, (2.10.18) నుంచి

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i\, p_{ij}$$

$$\pi_k = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_i\, p_{jk} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_j \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}\, p_{jk} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i\, p_{ik}^{(2)} \qquad \ldots 2.10.20$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j\, p_{jk}^{(n-1)} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}\, p_{jk}^{(n-1)} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i\, p_{ik}^{(n)}$$

$$\therefore \quad \pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i\, p_{ij}^{(n)}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$$

దీనినిబట్టి $\pi_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ స్థావర విభాజనమని రుజువు అవుతుంది.

మరల మార్కోవ్ శృంఖలం వివిధ స్థితులను ఆక్రమించే కాలాలను బట్టి అవధి సంభావ్యతలను నిర్ణయించే విధానాన్ని తెలుసుకొందాము. ఆదిలో i స్థితి నుండి బయలుదేరి, మొదటి n మెట్లలో ఏదైనా j స్థితిని ఆక్రమించిన సార్లను $N_{ij}^{(n)}$ తో సూచిస్తే, ఈ n మెట్లలో j స్థితిని మార్కోవ్ శృంఖలం సగటున ఆక్రమించే కాలము $\frac{1}{n}N_{ij}^{(n)}$ అవుతుంది. అవధి సంభావ్యతలు $n \longrightarrow \infty$ అయినప్పుడు ప్రక్రియయొక్క విభాజనాన్ని నిర్ణయిస్తాము. కాబట్టి విభాజనం యొక్క పౌనఃపున్య వివరణననుసరించి ప్రక్రియ వివిధ స్థితులను సగటున ఆక్రమించే సార్లనుబట్టి అవధి సంభావ్యతలను తెలియ చెప్పవచ్చు. ఈ ఫలితాన్ని కింది సిద్ధాంతం ద్వారా వ్రాస్తాము.

సిద్ధాంతము 2 10.14 :

$$\underset{n \longrightarrow \infty}{\mathrm{Lt}} \frac{1}{n} E\left(N_{ij}^{(n)}\right) = \underset{n \longrightarrow \infty}{\mathrm{Lt}} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)} = \frac{1}{\mu_j} = \pi_j$$

(2.10.18) లో నిర్వచించినట్లు సూచక యాదృచ్ఛిక చలరాశి $Y_{ij}^{(m)}$ ద్వారా

$$E\left(N_{ij}^{(m)}\right) = E\left(\sum_{m=1}^{n} Y_{ij}^{(m)}\right) = \sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)}$$

$$\therefore \underset{n \longrightarrow \infty}{\mathrm{Lt}} \frac{1}{n} E\left(N_{ij}^{(n)}\right) = \underset{n \longrightarrow \infty}{\mathrm{Lt}} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)} = \frac{1}{\mu_j} = \pi_j$$

అవుతుంది.

3

# సామాన్య మార్కోవ్ ప్రక్రియలు

(SIMPLE MARKOV PROCESSES)

## 3.1 ఉపోద్ఘాతము

మొదటి అధ్యాయము ( 1.2.1) లో మార్కోవ్ ప్రక్రియను కింది విధంగా నిర్వచించినాము. పరామితి సమితి, T గా స్థితి ఆవరణ S గా $\{X_t, t \in T\}$ యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ అయి, $t, t_r \in T$ $(r = 0, 1, \ldots, n)$, $t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t$ అయ్యేటట్లు పరిమిత లేదా గణనీయ అపరిమిత సంఖ్యల సమితిలోని $(t_0, t_1, \ldots t_n, t)$ బిందు సమితిని పరిశీలించండి. S లో ప్రతి వాస్తవ విలువల సమితి $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$ కి సంబంధించి,

$$P(X_t \leq x \mid X_{t_n} = x_n, \ldots, X_{t_0} = x_0)$$
$$= P(X_t \leq x \mid X_{t_n} = x_n) \qquad \ldots 3.1.1$$

అయితే, $\{X_t, t \in T\}$ ను మార్కోవ్ ప్రక్రియగా నిర్వచించినాము. T విచ్ఛిన్న పరామితి సమితి అయినప్పుడు, $\{X_t, t \in T\}$ ను 2 వ అధ్యాయంలో మార్కోవ్ శృంఖలంగా నిర్వచించి, మార్కోవ్ శృంఖలాలను గురించి సమగ్రంగా చర్చించినాము. T అవిచ్ఛిన్న పరామితి సమితి అయి, మార్కోవ్ నియమము (3.1.1) ను పాటించే కొన్ని సామాన్య మార్కోవ్ ప్రక్రియలను ఈ అధ్యాయంలో పరిశీలిద్దాము.

ఏదైన పరిశీలనా దృగ్విషయానికి సంబంధించి (0, t] అనే కాలాంతరంలో సంభవించే సంఘటన సంఖ్య $X_t$ అయితే, ఆ సంఘటనల నిర్ణీత కాలాల వద్ద, అంటే $t = 1, 2, 3, \ldots$ ల వద్దనే సంభవించ నవసరం లేదుగదా ! సంఘటనలు ఏ సమయము $t > 0$ లోనైనా సంభవించవచ్చు. ఉదాహరణకు, టెలిఫోన్ ఎక్స్ఛేంజి వద్ద నమోదు అయిన టెలిఫోను పిలుపులు, రేడియో యాక్టీవ్ శిథిలావస్థలో వెలువడిన $\alpha$-అణువులు, రోడ్డు ప్రమాదాలు, టైపులో తప్పులు సంభవించడం వంటి సంఘటనలు కాలగమనంలో ఎప్పుడైనా $t > 0$ ఉత్పన్నం కావచ్చు. (0, t] లో సంభవించిన సంఘటనల సంఖ్యను $X_t$ తో సూచిస్తే, ప్రతి $t > 0$ కు $X_t$ ధన పూర్ణాంక విలువలనే తీసుకొనే యాదృచ్ఛిక చలరాశి అవుతుంది. $\{X_t, t \geq 0\}$ అనేది ధన పూర్ణాంక విలువలే స్థితులుగా గల యాదృచ్ఛిక ప్రకియ. ఇటువంటి ప్రక్రియలను పూర్ణాంక విలువల ప్రక్రియ (Integral valued process) లేదా గణన ప్రక్రియ (counting process) అని అంటారు. $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ ల వద్ద వరసగా 1 వ, 2 వ, 3 వ, ...... n వ టెలిఫోన్ పిలుపులు నమోదు అయినా

యనుకోండి. అప్పుడు,

$$
\begin{aligned}
X_t &= 1, & 0 < t \le t_1 \\
&= 2, & t_1 < t \le t_2 \\
&\vdots & \vdots \\
&= n, & t_{n-1} < t \le t_n
\end{aligned}
$$

దీనితోపాటు, ప్రతి పెరుగుదల $X_t - X_s$ $(t > s > 0)$ కూడా పూర్ణాంక విలువలనే స్వీకరించే యాదృచ్ఛిక చలరాశి అవుతుంది.

ఖర్మాగారంలో తయారైన ఇనపరేకు మీద t వైశాల్యంగల రేకుపై ఉన్న లోపాల సంఖ్య $X_t$ అయితే, $\{X_t\}$ కి గణిత నమూనాగా తీసుకొనే 'పాయిజాన్ ప్రక్రియ' ను ఈ అధ్యాయంలో సమగ్రంగా చర్చిద్దాము. జనాభా అభివృద్ధికి గణిత నమూనా తీసుకొనే 'జనన, మరణ ప్రక్రియ' గురించి కూడా పరిశీలిద్దాము. ఇందులో ప్రతి జననాన్ని జనాభా సంఖ్యకు ఒక పెరుగుదలగాను; ప్రతి మరణాన్ని ఒక తగ్గింపుగాను పేర్కొంటాము. ఈ పెరుగుదల, తగ్గింపు గురించి చేసే ఉపకల్పనలు ఈ ప్రక్రియ, ఒక సామాన్య మార్కోవ్ ప్రక్రియగా రూపొందేటందుకు అనువుగా ఉంటాయి. ఈ ఉపకల్పనలలో కొద్ది మార్పు చేసి, వేర్వేరు రకాల జనాభాలకు పరస్పర భిన్నమైన ప్రక్రియలు గణిత నమూనాలుగా రూపొందుతాయి. ఉదాహరణకు, ఏదైనా జాతికి సంబంధించిన జనాభాలో అంటువ్యాధి వ్యాపించిన జీవాలనే పరిశీలించేటప్పుడు $(0, t]$ లో అంటువ్యాధి వ్యాపించిన జీవాలను $X_t$ తో సూచించి $\{X_t\}$ ని శుద్ధ జనన ప్రక్రియ (Pure birth process) నమూనా ద్వారా వర్ణించవచ్చు.

*నిర్వచనము* 3.1.1 : $(0, t]$ లో సంభవించిన మొత్తం సంఘటనల సంఖ్య $X_t$ అయితే, $\{X_t, t \ge 0\}$ అనే ప్రక్రియను గణన ప్రక్రియ అంటారు

ఉదాహరణాలుగా, (a) కిరాణా దుకాణంలో t క్షణానికి ప్రవేశించే మొత్తం కొనుగోలుదార్ల సంఖ్య $X_t$ అయితే, $\{X_t, t \ge 0\}$ అనేది గణన ప్రక్రియ అవుతుంది. ఇక్కడ కొనుగోలుదారు దుకాణంలోనికి ప్రవేశించడాన్ని 'సంఘటన' గా భావిస్తాము. (b) బిడ్డ జన్మించడాన్ని 'సంఘటన' గా భావించి t సమయానికి సంభవించే జననాల సంఖ్యను $X_t$ తో సూచిస్తే, $\{X_t, t \ge 0\}$ ను గణన ప్రక్రియ అని పిలవవచ్చు. (c) t సమయానికి చేసిన టైపులోని తప్పులను $X_t$ తో సూచిస్తే, $\{X_t, t \ge 0\}$ ను గణన ప్రక్రియ అవుతుంది. ఇక్కడ టైపులో తప్పు సంభవించడాన్ని 'సంఘటన'గా భావిస్తాము

పై నిర్వచనం ప్రకారం ప్రతి గణన ప్రక్రియ $\{X_t, t \ge 0\}$ కు,

(i) $X_t \ge 0$

(ii) $t$ లో $X_t$ పూర్ణాంక విలువల ప్రమేయము.

(iii) $t_1 < t_2$ అయితే, $X_{t_1} \leq X_{t_2}$.

(iv) ప్రతి $t_1 < t_2$, $(t_1, t_2]$ లో సంభవించిన సంఘటనల సంఖ్య $X_{t_2} - X_{t_1}$.

*నిర్వచనము* 3.1.2: ఏ గణన ప్రక్రియ $\{X_t, t \geq 0\}$ కు సంబంధించిన వివర్జిత కాలాంతరాలలో జరిగిన సంఘటనల సంఖ్యలు స్వతంత్రాలవుతాయో, అట్టి $\{X_t\}$ ని స్వతంత్ర పెరుగుదలలు (independant increments) గల గణన ప్రక్రియ అంటారు.

అంటే, $(0, s]$, $(s, t]$ లలో సంభవించిన సంఘటనల సంఖ్యలు $X_s, X_t - X_s$ యాదృచ్ఛిక చలరాశులు కాబట్టి నిర్వచనం దృష్ట్యా $X_s, X_t - X_s$ లు స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులు కావలెనన్నమాట. ఇప్పుడు పై ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాము. (b) కి సంబంధించి స్వతంత్ర పెరుగుదలల ఉపకల్పన సమంజసం కావచ్చుగాని, (a) లో కాకపోవచ్చు. కిరాణా దుకాణంలో చాల ఎక్కువ మంది ఉన్నప్పుడు కొత్తగా వచ్చిన కొనుగోలు దారు ఆ గుంపును చూసి దుకాణంలోనికి ప్రవేశించకుండానే వెళ్లిపోవచ్చు. ఒక్కొకసారి ఆ గుంపును చూసి కొనుగోలుదారులకు అనుకూలంగా ఉండు అమ్మకం ఏదైనా జరుగుతుందేమోనని మరికొంతమంది ఆ దుకాణంలోకి ప్రవేశించవచ్చు. ఏది ఏమైనా ఇట్టి పరిస్థితులలో (a) లో సూచించిన పెరుగుదలలు స్వతంత్రాలు కాకపోవచ్చు. (c) లోని $\{X_t\}$ కూడా స్వతంత్ర పెరుగుదలలుగల గణన ప్రక్రియగా అంగీకరించలేము. టైపు చేయడంలో ఎదుర్కొనే అలసట దీనికి కారణంకావచ్చు.

*నిర్వచనము* : ఏ అంతరంలోనైనా సంభవించే సంఘటనల విభాజనము, ఆ అంతరం పొడవుపైననే ఆధారపడితే, వాటికి సంబంధించిన ప్రక్రియను స్థావర (stationary) లేదా సజాతీయ (homogeneous) పెరుగుదలలుగల ప్రక్రియ అంటారు.

అంటే అన్ని $t_1 < t_2$, $t > 0$ లకు, $X_{t_2} - X_{t_1}$, $X_{t_2+t} - X_{t_1+t}$ లు ఒకే విభాజనాన్ని అనుసరిస్తే, $\{X_t, t \geq 0\}$ స్థావర పెరుగుదలలుగల ప్రక్రియ అవుతుంది. గిరాకి హెచ్చుగా ఉండే ప్రత్యేక సమయాలు ఉంటే, (a) లోని ప్రక్రియను స్థావర పెరుగుదలలుగల గణన ప్రక్రియగా అనుకోవడం అసమంజసము. (b) లోని ప్రక్రియను స్థావర పెరుగుదలలుగల గణన ప్రక్రియగా అనుకోవచ్చు కాని, (c) ని స్థావర ప్రక్రియగా స్వీకరించలేము. ప్రారంభ దశలోని తప్పుల సంఖ్యకంటే అంత్య దశలోని తప్పుల సంఖ్య ఎక్కువగా ఉండవచ్చు.

ముందుగా ఈ అధ్యాయంలో అవసరమయ్యే మార్కోవ్ ప్రక్రియల కొన్ని ముఖ్యమైన సాధారణ ధర్మాలను పేర్కొంధాము.

## 3.2 మార్కోవ్ ప్రక్రియ కొన్ని సాధారణ ధర్మాలు

S, విచ్ఛిన్న స్థితి ఆవరణతో $\{X_t, t \geq 0\}$ అనేది మార్కోవ్ ప్రక్రియ అనుకొందాము. దీని సంక్రమ సంభావ్యతా మాత్రిక $P^{(t)} = (p_{ij}^{(t)})$ అయి, $p_{ij}^{(t)} = P(X_t = j \mid X_0 = i)$ $\forall$ i, j $\varepsilon$ S అయితే, సంక్రమ సంభావ్యతలు, $p_{ij}^{(t)}$, కింది లక్షణాలను పొంది ఉంటాయని తెలుసు.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{(i)} & p_{ij}^{(t)} \geq 0, & \forall t > 0 \\ \text{(ii)} & \sum\limits_{j \varepsilon S} p_{ij} = 1, & \forall t > 0 \\ \text{(iii)} & p_{ij}^{(t+s)} = \sum\limits_{k \varepsilon S} p_{ik}^{(t)} p_{kj}^{(s)} & s, t > 0 \\ \text{(iv)} & p_{ij}^{(t)}, \text{ t లో ఒక అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము} & \\ \text{(v)} & \underset{t \to 0}{Lt}\; p_{ij}^{(t)} = \delta_{ij} & \end{array}\right\} \quad \ldots 3.2.1$$

ఈ లక్షణాల దృష్ట్యా, $p_{ij}^{(t)}$ యొక్క అవకలనాలను కింది విధంగా సూచిస్తూ వ్రాయవచ్చు.

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_{ii} = \underset{t \to 0}{Lt}\; \dfrac{1 - p_{ii}^{(t)}}{t} = -\,p_{ii}'^{(0)}, & i\, \varepsilon\, S \\ \lambda_{ij} = \underset{t \to 0}{Lt}\; \dfrac{p_{ij}^{(t)}}{t} = p_{ij}'^{(0)}, & i, j\, \varepsilon\, S,\ i \neq j \end{array}\right\} \quad \ldots 3.2.2$$

ఇక్కడ $\lambda_{ii}$, $\lambda_{ij}$ లు ప్రక్రియ యొక్క తీవ్రతలు (intensities) లేదా సంక్రమ రేట్లు (transition rates) ను తెలుపుతాయి.

మార్కోవ్ ప్రక్రియ యొక్క (3.2.1) లోని (iii) ని చాప్‌మెన్ కొల్మొగ్రోవ్ సమీకరణమంటారు. దిగువ ప్రకరణాలలో మనం చర్చించబోయే వివిధ సామాన్య మార్కోవ్ ప్రక్రియల విశ్లేషణా విధానంలో ఉపయోగించే సమీకరణాలను (3.2.1) ద్వారా నిరూపిస్తాము. (3.2.1) లో $s = \triangle t$ ని ప్రతిక్షేపిస్తే,

$$p_{ij}^{(t+\triangle t)} = \sum_{k \varepsilon S} p_{ik}^{(t)}\, p_{kj}^{(\triangle t)} \quad \ldots 3.2.3$$

$$= \sum_{k \neq j} p_{ik}^{(t)} p_{kj}^{(\Delta t)} + p_{ij}^{(t)} p_{jj}^{(\Delta t)}$$

రెండువైపులనుండి $p_{ij}^{(t)}$ ని తీసివేసి, $\Delta t$ తో భాగిస్తే,

$$\frac{p_{ij}^{(t+\Delta t)} - p_{ij}^{(t)}}{\Delta t} = \sum_{k \neq j} p_{ik}^{(t)} \frac{p_{kj}^{(\Delta t)}}{\Delta t} + p_{ij}^{(t)} \cdot \frac{p_{jj}^{(\Delta t)} - 1}{\Delta t}$$

$\Delta t \longrightarrow 0$ అయితే, అవధులు ఉంటాయికాబట్టి,

$$p_{ij}'^{(t)} = \sum_{k \neq j} p_{ik}^{(t)} \lambda_{kj} - p_{ij}^{(t)} \lambda_{jj} \qquad \ldots 3.2.4$$

స్థిర i విలువకు (3.2.4) సమఘాత అవకలన సమీకరణాలను సూచిస్తుంది. వీటిని పురోగమన కొల్మొగ్రోవ్ సమీకరణాలు (Forward Kolmogrov equations) అంటారు. ఇదేవిధంగా, (3.2.1) లో $t = \Delta s$ ప్రతిక్షేపించి,

$$p_{ij}^{(\Delta s+s)} = \sum_{k \varepsilon S} p_{ik}^{(\Delta s)} p_{kj}^{(s)}$$

రెండువైపుల నుండి $p_{ij}^{(s)}$ ను తీసివేసి, ఇరువైపులను $\Delta s$ తో భాగించి, $\Delta s \longrightarrow 0$ అయితే, అవధిలో (s బదులు t ని వాడిప్రాస్తే),

$$p_{ij}'^{(t)} = \sum_{k \neq j} \lambda_{ik} p_{kj}^{(t)} - \lambda_{ii} p_{ij}^{(t)} \qquad \ldots 3.2.5$$

స్థిర j విలువకు (3.2.5) సమఘాత అవకలన సమీకరణాలను సూచిస్తుంది. వీటిని తిరోగమన కొల్మొగ్రోవ్ సమీకరణాలు (Backward Kolmogrov equations) అంటారు.

సంక్రమరేట్లు $\lambda_{ij}$ మూలకాలుగాగల మాత్రిక

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_{00} & \lambda_{01} & \lambda_{02} & \cdots \\ \lambda_{10} & -\lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots \\ \lambda_{20} & \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \qquad \ldots 3.2.6$$

$P'^{(t)} = (p'^{(t)}_{ij})$ అయితే, Λ మాత్రిక ప్రక్రియ యొక్క సంక్రమ రేటు మాత్రిక (transition rate matrix) అంటారు. ఈ మాత్రిక సంకేతంలో (3.2.4), (3.2.5) లను వ్రాస్తే, పురోగమన తిరోగమన కొల్మొగ్రోవ్ సమీకరణాలు వరసగా,

$$\left.\begin{aligned} P'^{(t)} &= P^{(t)}\,\Lambda \\ P'^{(t)} &= \Lambda\, P^{(t)} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots 3.2.7$$

$P^{(0)} = (\delta_{ij}) = I$ అనే సమీకరణాలు (3.2.7) లకు ఆదినియమాలు (initial conditions) అవుతాయి. మామూలు పద్ధతులలో (3.2.7) లను సాధిస్తే,

$$P^{(t)} = \exp\left[\Lambda t\right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \qquad \ldots 3.2.8$$

Λ పరిమిత మాత్రిక అయినప్పుడే (3.2.8) అభిసరణ శ్రేణి అయి, (3.2.4), (3.2.5) లకు కూడా ఏకైక సాధనం అవుతుంది. Λ ని వికర్ణమాత్రికగా చేస్తే Λ కింది రూపంలో ఉంటుంది.

$$\Lambda = QDQ^{-1}$$

ఇక్కడ D, Λ మాత్రిక యొక్క విభిన్న ఐగిన్ (eigen) విలువలు మూలకాలుగాగల వికర్ణ మాత్రిక. అంటే, $D = \{d_1, \ldots, d_N\}$.

$$\therefore \quad P^{(t)} = \exp\left[QDQ^{-1}t\right]$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q(Dt)^n Q^{-1}}{n!}$$

$$= Q\left[I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Dt)^n}{n!}\right] Q^{-1}$$

$$= Q\,e^{Dt}\,Q^{-1} \qquad \ldots 3.2.9$$

ఇక్కడ $e^{Dt} = \{e^{d_1 t}, \ldots, e^{d_N t}\}$.

*3.2.1 అవధి విభాజనాలు ; మార్కోవ్ శృంఖలాలలో అవధి సంభావ్యతలకు*

సంబంధించి నిరూపించిన సిద్ధాంతాలకు అనురూపంగా మార్కోవ్ ప్రక్రియలలో కూడా అవధి విభాజనాలకు సంబంధించిన సిద్ధాంతాలను చర్చించవచ్చు. కొన్ని ముఖ్య సిద్ధాంతాలను నిరూపణ లేకుండా కింద ఇచ్చినాము.

సిద్ధాంతము 3.2.1 : విడదీయలేమి మార్కోవ్ ప్రక్రియలకు సంబంధించిన అవధి విభాజనానికి $\lim_{t \to \infty} p_n^{(t)} = \pi_n$, $n \in S$. S లోని స్థితులు, n బట్టి ప్రతి $n \in S$ కి,

$$\pi_n \geq 0, \quad \sum_{n \in S} \pi_n = 1.$$

$t \to \infty$ అయినప్పుడు, అవధి ఉంటుందనుకొన్నా, అవధి సంభావ్యత $\pi_n$, t పై ఆధారపడదు. అందువల్ల అవధిలో,

$$p_n'^{(t)} \to 0, \qquad t \to \infty \qquad \ldots 3.2.10$$

ఇప్పుడు $(\pi_k = \lambda_{ik})$ కనక (3.2.10) ఆధారంగా (3.2.4) ని వ్రాస్తే,

$$0 = \sum_{k \neq j} \pi_k \lambda_{kj} + \pi_j \lambda_{jj}, \qquad j \in S \qquad \ldots 3.2.11$$

(3.2.11) ను మాత్రికా సంకేతాలలో వ్రాస్తే,

$$\pi \Lambda = O, \quad \pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots) \qquad \ldots 3.2.12$$

మార్కోవ్ ప్రక్రియ యొక్క అవధి విభాజనాన్ని నిర్ణయించడమే మన సమస్య అయితే, పై కొల్మొగ్రోవ్ సమీకరణాలను వ్రాసే అవసరముండదు. సంక్రమ రేట్లు $\lambda_{ij}$ ను కనుక్కొంటేచాలు.

సజాతీయ సమీకరణాలు (3.2.12) కు శూన్య సదిశ (0, 0, 0, ...) సాధన మవుతుంది. కాబట్టి అశూన్య ఏకైక సాధన పరిష్కారం కోసం (3.2.12) తో పాటు, అదనంగా $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \ldots = 1$ అనే నియమాన్ని కూడా విధించవలె. ధన అవధి సంభావ్యతలు $\{\pi_n, \sum \pi_n = 1\}$ గల విడదీయలేమి మార్కోవ్ ప్రక్రియను నిస్సంశయ పునరావృత మార్కోవ్ ప్రక్రియ (Positive recurrent Markov process) అంటారు. $\{\pi_n; n = 0, 1, 2, \ldots\}$ ఏకైక అవధి విభాజనమని గ్రహించవచ్చు. విడదీయలేమి పరిమిత మార్కోవ్ ప్రక్రియలు ఎప్పుడు నిస్సంశయ పునరావృత మార్కోవ్ ప్రక్రియలే అవుతాయి.

సిద్ధాంతము 3.2.2 : విడదీయలేమి నిస్సంశయ పునరావృత మార్కోవ్ ప్రక్రియ

యొక్క అవధి విభాజనం కూడా స్థావర విభాజనమవుతుంది.

అంటే, ఆదిలో $p_n^{(0)} = \pi_n$ ; $n = 0, 1, 2, \ldots$ అయితే, $p_n^{(t)} = \pi_n$, $\forall$ t. విడదీయలేమి మార్కోవ్ శృంఖలాలలో నిరూపించిన ధర్మాలతో పోల్చి చదివితే, పై ఫలితాలు సులభగ్రాహ్యాతాలవుతాయి.

## 3.3 పాయిజాన్ ప్రక్రియ (Poisson process)

(0, t] లో సంభవించిన సంఘటనల సంఖ్యను $X_t$ తో సూచిస్తే, $\{X_t, t \geq 0\}$ గణన ప్రక్రియ అవుతుందని తెలుసుకొన్నాము. ప్రతి $s < t$ కి, ఘటన $[X_t = j \mid X_s = i]$ యొక్క షరతు సంభావ్యతను కింది విధంగా సూచిద్దాము.

$$p_{ij}(s, t) = P(X_t = j \mid X_s = i) \quad (i, j = 0, 1, 2, \ldots) \quad \ldots 3.3.1$$

*3.3.1 పాయిజాన్ స్వీకృతాలు :* ఏదైనా పరిశీలనా దృగ్విషయానికి సంబంధించిన సంఘటనలు కింది ఉపకల్పనలకు అనుగుణంగా సంభవిస్తాయని అనుకొందాము :

(a) $\{X_t, t \geq 0\}$ అనేది స్వతంత్ర స్థావర పెరుగుదలలు గల గణన ప్రక్రియ

(b) ప్రతి అత్యంతల్ప విలువ $\triangle t$ కి, $(t, t + \triangle t]$ లో జరిగిన సంఘటనలకు చెందిన సంభావ్యతలకు కింద పేర్కొన్నట్లుగా ఒక ధనాంకం, $\lambda$ ఉంటుంది:

(i) $p_{i\,i+1}(t, t + \triangle t) = \lambda \triangle t + O(\triangle t)$

(ii) $\displaystyle\sum_{j=i+2}^{\infty} p_{ij}(t, t + \triangle t) = O(\triangle t).$

వీటిని బట్టి $p_{ii}(t, t + \triangle t) = 1 - \lambda \triangle t + O(\triangle t)$ అవుతుందని గమనించవలె. (ఇక్కడ $\triangle t \longrightarrow 0$ అయినప్పుడు, అవధిలో $\dfrac{O(\triangle t)}{\triangle t} \longrightarrow 0$ అయ్యేటట్లు $O(\triangle t)$ ని నిర్వచిస్తాము)

(i) దృష్ట్యా, $(t, t + \triangle t]$ అనే $\triangle t$ పొడవుగల స్వల్పాంతరంలో ఒక సంఘటన లేదా $i \longrightarrow i + 1$ అనే సంక్రమం సంభవించే సంభావ్యత $\lambda \triangle t + O(\triangle t)$ అనీ, (ii) దృష్ట్యా $(t, t + \triangle t]$ లో ఒకటి కంటే ఎక్కువ సంఘటనలు జరగడానికి సంభావ్యత $O(\triangle t)$ అనే అత్యల్ప విలువకు సమానమనీ గ్రహించవలె.

పైన పేర్కొన్న ఉపకల్పనలను పాయిజాన్ స్వీకృతాలు (Poisson

postulates) అనీ, ఈ స్వీకృతాలననుసరించి సంభవించే సంఘటనలను పాయిజాన్ సంఘటనలనీ (Poisson events) అనీ అంటారు. ఏదైనా (s, t) కాలాంతరంలో సంభవించే సంఘటనల సంఖ్య $X_t - X_s$ అంతరం పొడవు, $t - s$ పై ఆధారపడుతుందని చూపవచ్చు. అందువల్ల $\{X_t, t \geq 0\}$ ను సజాతీయ ప్రక్రియగా పేర్కొంటాము.

*పాయిజాన్ ప్రక్రియకు నిర్వచనం 3.3.1 :* కింద నియమాలననుసరించే గణన ప్రక్రియ $\{X_t, t \geq 0\}$ ను $\lambda$ $(> 0)$ పరామితితో పాయిజాన్ ప్రక్రియ అంటారు :

i $X_0 = 0$

ii t పొడవుగల ఏ కాలాంతరంలోనైనా సంభవించే సంఘటనల సంఖ్య $X_t$, $(t \geq 0)$ అంక మధ్యమము $\lambda t$ గా గల పాయిజాన్ విభాజనాన్ని అనుసరించవలె. అంటే, ప్రతి s, $t \geq 0$ కు,

$$P(X_{s+t} - X_s = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

ఈ నియమాల దృష్ట్యా $\{X_t, t \geq 0\}$ స్వతంత్ర పెరుగుదలలుగల ప్రక్రియ అని చూపవచ్చు. ఇక్కడ

$$p_n^{(t)} = P(X_t = n) = P(X_t - X_0 = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \; n = 0, 1, \ldots$$

అంటే, $X_t - X_0$, $X_{t+s} - X_s$ లు ఒకే విభాజనాన్ని అనుసరించే పెరుగుదలలు కాబట్టి పాయిజాన్ ప్రక్రియ సజాతీయ పెరుగుదలలుగల గణన ప్రక్రియ కూడా అవుతుంది. పాయిజాన్ ప్రక్రియ పాయిజాన్ స్వీకృతాలను పాటిస్తుందని గమనించవలె.

*సిద్ధాంతము 3.3.2 :* పాయిజాన్ స్వీకృతాలను పాటిస్తూ, $p_0^{(0)} = P(X_0 = 0) = 1$ అయ్యే ఏ గణన ప్రక్రియ $\{X_t, t \geq 0\}$ అయినా పాయిజాన్ ప్రక్రియ అవుతుంది.

*నిరూపణ :* స్వీకృతం (a) ని దృష్టిలో పెట్టుకొని, చాప్‌మెన్ - కొల్మొగ్రోవ్ సమీకరణం (3.2.1) ఆధారంగా, ప్రతి $s < t < u$ లకు,

$$p_{in}(s, u) = \sum_j p_{ij}(s, t)\, p_{jn}(t, u) \qquad \ldots 3.3.2$$

అని వ్రాయవచ్చు.

ఇందులో s, t, u లకు బదులుగా వరసగా 0, t, $t + \Delta t$ లను ప్రతిక్షేపిస్తే,

$P(X_0 = 0) = 1$ కాబట్టి,

$$p_{0n}(0, t + \triangle t) = \sum_j p_{0j}(0, t)\, p_{jn}(t, t + \triangle t) \qquad \ldots 3.3.3$$

ప్రత్యేక విలువ $n = 0$ కు,

$$p_{00}(0, t + \triangle t) = p_{00}(0, t) \cdot p_{00}(t, t + \triangle t) \qquad \ldots 3.3.4$$

ప్రతి $n > 0$ కు (3.3.3) నుండి

$$p_{0n}(0, t + \triangle t) = p_{0n}(0, t)\, p_{nn}(t, t + \triangle t) + p_{0n-1}(0, t) \cdot p_{n-1\, n}(t, t + \triangle t) + \sum_{j \neq n-1, n} p_{0j}(0, t)\, p_{jn}(t, t + \triangle t) \qquad \ldots 3.3.5$$

$\{X_t\}$ సజాతీయ పెరుగుదలలుగల ప్రక్రియ కారణంగా, $p_{0n}(0, t) = p_n^{(t)}$ i స్వీకృతం (b) దృష్ట్యాను (3.3.4), (3.3.5) లను కింది విధంగా వ్రాస్తాము.

$$p_0^{(t+\triangle t)} = p_0^{(t)} \left[1 - \lambda \triangle t + O(\triangle t)\right] \qquad \ldots 3.3.6$$

$$p_n^{(t+\triangle t)} = p_n^{(t)} \left[1 - \lambda \triangle t + O(\triangle t)\right] + p_{n-1}^{(t)} \left[\lambda \triangle t + O(\triangle t)\right] + O(\triangle t) \quad (n > 0) \qquad \ldots 3.3.7$$

(3.3.6) నుంచి,

$$\frac{p_0^{(t+\triangle t)} - p_0^{(t)}}{\triangle t} = -\lambda \cdot p_0^{(t)} = \frac{O(\triangle t)}{\triangle t}$$

$\triangle t \longrightarrow 0$ అయినప్పుడు ఎడమవైపు పదము అవధిలో $\frac{d}{dt}(p_0^{(t)}) = p_0^{\prime(t)}$.

$\frac{O(\triangle t)}{\triangle t} \longrightarrow 0$ కాబట్టి

$$p_0^{\prime(t)} = -\lambda\, p_0^{(t)} \qquad \ldots 3.3.8$$

ఇదే విధంగా, (3.3.7) నుండి,

$$p_n^{\prime(t)} = -\lambda\, p_n^{(t)} + \lambda\, p_{n-1}^{(t)} \qquad (n > 0) \qquad \ldots 3.3.9$$

తొలి నియమాలు $p_0^{(0)} = 1$, $p_n^{(0)} = 0$ ను ఉపయోగించి (3.3.8), (3.3.9) అవకలన సమీకరణాలను సాధిస్తాము. (3.3.8) నుండి, $p_0^{(0)} = 1$ దృష్ట్యా

$$p_0^{(t)} = e^{-\lambda t} \qquad \ldots 3.3.1($$

(3.3.9) లో $p_n^{(t)} = V_n^{(t)} e^{-\lambda t} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ ను ప్రతిక్షేపిస్తే,

$$p_n'^{(t)} = V_n'^{(t)} e^{-\lambda t} - \lambda V_n^{(t)} e^{-\lambda t}$$

$$= \left(V_n'^{(t)} - \lambda V_n^{(t)}\right) e^{-\lambda t}.$$

$$\therefore \left(V_n'^{(t)} - \lambda V_n^{(t)}\right) e^{-\lambda t} = -\lambda \left(p_n^{(t)} - p_{n-1}^{(t)}\right)$$

$$= -\lambda \left(V_n^{(t)} - V_{n-1}^{(t)}\right) e^{-\lambda t}$$

లేదా $V_n'^{(t)} = \lambda V_{n-1}^{(t)}$

రెండు వైపుల $t$ దృష్ట్యా సమాకలనం చేస్తే,

$$V_n^{(t)} + C = \lambda \int_0^t V_{n-1}^{(t)} dt$$

$t = 0$ అయితే, $C = -V_n^{(0)} = 0$ కాబట్టి

$$V_n^{(t)} = \lambda \int_0^t V_{n-1}^{(t)} dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ప్రత్యేకించి,

$$V_1^{(t)} = \lambda \int_0^t V_0^{(t)} dt = \lambda t \qquad (\because V_0^{(t)} = 1).$$

$$V_2^{(t)} = \lambda \int_0^t V_1^{(t)} dt = \lambda^2 \frac{t^2}{2!}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$V_n^{(t)} = \lambda \int_0^t V_{n-1}^{(t)}\, dt = \frac{(\lambda t)^n}{n\,!}$$

$$\therefore \quad p_n^{(t)} = V_n^{(t)} e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^n}{n\,!} e^{-\lambda t} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \ldots 3.3.11$$

(3.3.10), (3.3.11) ల ప్రకారం ప్రతి $t \geq 0$ కు

$$p_n^{(t)} = P\left(X_t = n\right) = \frac{(\lambda t)^n}{n\,!}\, e^{-\lambda t}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

కాబట్టి నిర్ణీత కాలాంతరము, $(0, t]$ లో సంభవించే పాయిజాన్ సంఘటనల సంఖ్య పాయిజాన్ విభాజనాన్ని అనుసరిస్తుంది. దీని అంకమధ్యమము = విస్తృతి = $\lambda t$.

పరిశీలనా ప్రారంభము $t = 0$ నుంచి కాక ప్రక్రియ తొలి పరిశీలనా కాలము $s\ (s > 0)$ వద్ద ప్రారంభమయితే, $X_s = i$ అనుకొందాము. పై చర్చనాధారంగా కొద్ది మూలబిందువు మార్పిడితో కింది సంభావ్యతను సులభంగా సాధించవచ్చు.

$$p_{in}(s, t) = \begin{cases} e^{-\lambda (t-s)} \dfrac{\{\lambda (t-s)\}^{n-i}}{(n-i)\,!}, & n \geq i \\ = 0, & n < i, \end{cases} \qquad \ldots 3.3.12$$

దీనిని భేదించిన పాయిజాన్ విభాజనము (truncated poisson distribution) అంటారు.

పై సంభావ్యతలు $p_n^{(t)}$, $p_{in}(s, t)$ సంఘటనలు సంభవించిన కాలాంతరపు పొడవు మీద ఆధారపడినాయి కాబట్టి పరిశీలించిన ప్రక్రియ సజాతీయ పాయిజాన్ ప్రక్రియ అవుతుంది. ఇది సజాతీయ మార్కోవ్ ప్రక్రియ కూడా. దీని సంక్రమ సంభావ్యతా ప్రమేయము :

$$p_{ij}^{(t)} = p_{ij}(t_1, t_2) = P\left(X_{t_2} = j \mid X_{t_1} = i\right)$$

$$(t = t_2 - t_1)$$

$$= P\left(X_{t_2} = j,\ X_{t_1} = i\right) \div P\left(X_{t_1} = i\right)$$

$$= P(X_{t_2} - X_{t_1} = j - i,\ X_{t_1} - X_0 = i) \div P(X_{t_1} - X_0 = i)$$

$$= P(X_{t_2} - X_{t_1} = j - i)$$

$$\therefore \quad p_{ij}^{(t)} = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}, \quad j \geq i \qquad \ldots 3.3.13$$
$$= 0$$

(3.3.13) నుంచి, ప్రతి $j > i$ కి,

$\underset{t \to \infty}{Lt}\ p_{ij}^{(t)} = 0$ అని గమనించవలె.

సజాతీయ పాయిజాన్ ప్రక్రియ యొక్క అవధి సంభావ్యతలు సున్నకు సమానం కాబట్టి ఈ ప్రక్రియ యొక్క స్థితి ఆవరణలోని స్థితులన్నీ సంక్రమ స్థితులు లేదా సంశయ పునరావృత స్థితులవుతాయి. ప్రతి స్థితి $i$ నుంచి $j\ (> i)$ స్థితి అవుతుంది. కాని $j$ స్థితి నుండి $i$ స్థితి ప్రవేశింపదగు స్థితి కాదని గ్రహించవలె.
(3.2.2), (3.3.13) ల నుంచి

$$\lambda_{ii} = \underset{t \to 0}{Lt} \frac{1 - p_{ii}^{(t)}}{t} = \underset{t \to 0}{Lt} \frac{1 - e^{-\lambda t}}{t} = \lambda$$

$$\lambda_{ij} = \underset{t \to 0}{Lt} \frac{p_{ij}}{t} = \underset{t \to 0}{Lt} \frac{(\lambda t)^{j-i} e^{-\lambda t}}{(j-i)!\,t}$$

లేదా
$$\lambda_{ij} = \lambda, \quad j = i + 1$$
$$= 0, \quad j - i > 1. \qquad (3.3.14)$$

(3.2.2) ప్రకారం ఈ $\lambda_{ii}$, $\lambda_{ij}$ లు పాయిజాన్ ప్రక్రియ యొక్క తీవ్రతలు అవుతాయి. (3.3.14) దృష్ట్యా సజాతీయ పాయిజాన్ ప్రక్రియ యొక్క తీవ్రతలు సంభవ కాలము $t$ పై ఆధారపడని స్థిరాంకాలని గమనించవలె.

*3.3.2 అంతర్సంభవ వ్యవధుల విభాజనము* (inter-occurrence times distributions) : పాయిజాన్ సంఘటనలు $t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots$ అనే నిర్దిష్ట సమయాల

వద్ద మాత్రమే సంభవించాయనుకొంటే, $T_1 = t_1 - t_0$, $T_2 = t_2 - t_1$ లు వరసగా 1, 2, 3, ... వ సంఘటనలు సంభవించే వ్యవధుల కాలాంతరాలను తెలుపుతాయి. పాయిజాన్ స్వీకృతం (a) ప్రకారం $t_i$ కు ముందు, తరవాత సంభవించే సంఘటనలు పరస్పరం స్వతంత్రాలు కాబట్టి, $T_1, T_2, \ldots$ లు స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులని స్పష్టమవుతుంది. వీటిని అంతర్సంభవ వ్యవధులు (inter occurrence times) అంటారు. వీటికి సంబంధించిన కింది సిద్ధాంతాన్ని పరిశీలిద్దాము.

సిద్ధాంతము 3.3.3: రెండు వరసగా సంభవించే పాయిజాన్ సంఘటనల అంతర్సంభవ వ్యవధులు $T_1, T_2, \ldots$ ఋణఘాత (negative exponential) విభాజనాన్ని అనుసరించే పరస్పర స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులు.

నిరూపణ: ప్రతి $t \geq 0$ కి, $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

$$\text{ఘటన } [T_n > t] \equiv \text{ఘటన } [X_{t_{n-1}+t} - X_{t_{n-1}} = 0]$$

$$\therefore \quad P[T_n > t] = P[X_{t_{n-1}+t} - X_{t_{n-1}} = 0]$$

$$= P[X_t = 0]$$

కాని $X_t$, అంకమధ్యమము $\lambda t$ గా గల పాయిజాన్ యాదృచ్ఛిక చలరాశి కాబట్టి,

$$P[T_n > t] = e^{-\lambda t}.$$

ప్రతి $t \geq 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ కు, $T_n$ యొక్క విభాజన ప్రమేయము

$$P(T_n \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad \ldots 3.3.15$$

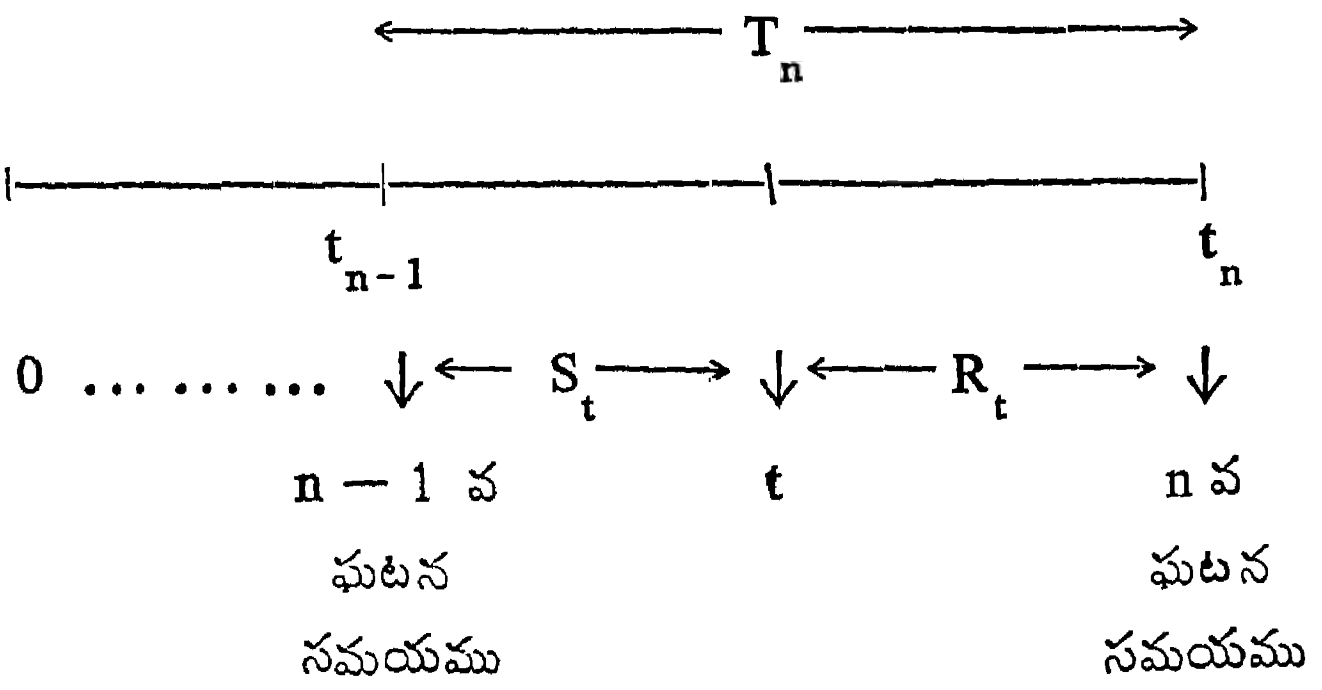
$T'$ ల సంభావ్యతా సాంద్రతా ప్రమేయము (probability density function)

$$\frac{d}{dt}\left\{P(T_n \leq t)\right\} = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \; t \geq 0.$$

$\{X_t, t \geq 0\}$ సజాతీయ మార్కోవ్ ప్రక్రియ కాబట్టి $T_1, T_2, \ldots$ లు పరస్పర స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులని కూడా గ్రహించవచ్చు.

t వద్ద పాయిజాన్ సంఘటన సంభవించలేదని అనుకొంటే, ఆ తరవాత సంఘటన సంభవించడానికి పట్టే నిరీక్షణా కాలమును $R_t$ తోను, t కి ముందు సంభవించిన సంఘటన

తరవాత కాలవ్యవధిని $S_t$ తోను సూచిస్తే, $R_t$, $S_t$ లు యాదృచ్ఛిక చలరాశులు అవుతాయి. కింది చిత్రంద్వారా $R_t$, $S_t$ ల నిర్వచనాలను వర్ణించినాము.




ప్రస్తుతం $R_t$, $S_t$ ల సంభావ్యతా విభాజనాలను పరిశీలిద్దాము.

*సిద్ధాంతము* 3.3.4 : $R_t$ యొక్క సంభావ్యతా విభాజనము

$$P\left(R_t \le x\right) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \ge 0 \qquad \ldots 3.3.16$$

*నిరూపణ* : పై చిత్రంలో వర్ణించినట్లు $t_{n-1}$, $t_n$ ల మధ్య $t$ ఏదైనా ఒక కాల బిందువు అనుకొందాము. $[R_t \le x]$ ఘటన ప్రకారం $(t_{n-1}, t]$ లో ఏ సంఘటన కూడా సంభవించలేదని అర్థము. $[R_t \le x]$, $[T_n \le t - t_{n-1} + x \quad T_n > t - t_{n-1}]$ అనేవి రెండు తుల్య సంఘటనలు కాబట్టి

$$P\left(R_t \le x\right) = P\left(T_n \le t - t_{n-1} + x \quad T_n > t - t_{n-1}\right)$$

$$= P\left(t - t_{n-1} < T_n \le t - t_{n-1} + x\right) \div P\left(T_n > t - t_{n-1}\right)$$

$$= \frac{\left[P\left(T_n \le t - t_{n-1} + x\right) - P\left(T_n \le t - t_{n-1}\right)\right]}{P\left[T_n > t - t_{n-1}\right]}$$

కాని సిద్ధాంతం 3.3.3 ప్రకారం,

$$P\left(T_n \le t\right) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$\therefore P\left(R_t \le x\right) = \frac{\left\{1 - e^{-\lambda\left(t - t_{n-1} + x\right)}\right\} - \left\{1 - e^{-\lambda\left(t - t_{n-1}\right)}\right\}}{e^{-\lambda\left(t - t_{n-1}\right)}}$$

$$= 1 - e^{-\lambda x} \quad , \quad x \geq 0 .$$

సిద్ధాంతము 3.3.5 : $S_t$ యొక్క సంభావ్యతా విభాజనము

$$\left.\begin{aligned} P(S_t \leq x) &= 1 - e^{-\lambda x} \quad , \quad 0 \leq x < t \\ P(S_t = x) &= e^{-\lambda x} \quad , \quad x = t \end{aligned}\right\} \quad \ldots 3.3.17$$

*నిరూపణ* : మొదట్లో (0, t] లో ఏ సంఘటన సంభవించలేదని అనుకొంటే, సిద్ధాంతము (3.3.3) దృష్ట్యా,

$$P(S_t = t) = P(T_1 > t) = e^{-\lambda t} .$$

మరల (0, t] లో కనీసం ఒక్క సంఘటన అయినా సంభవించిందని అనుకొందాము. x ని (t−x, t] లో కనీసం ఒక్క సంఘటన అయినా సంభవించడానికి వ్యవధి ఉండేటట్లు ఎన్నుకో గలిగితే, ప్రతి $x \geq 0$ కి

$P(S_t \leq x) = P\{(t - x, t]$ లో కనీసం ఒక్క సంఘటన అయినా సంభవించడం$\}$

$= 1 - P\{(t - x, t]$ లో ఒక్క సంఘటన అయినా సంభవించదు$\}$

$$= 1 - P(X_x = 0) = 1 - e^{-\lambda x} .$$

*గమనిక :* సిద్ధాంతము 3·3.3 ద్వారా ఋణఘాత విభాజనం యొక్క ఒక ప్రత్యేక లక్షణం స్పష్టమవుతుంది. T, ఋణఘాత విభాజనాన్ని అనుసరించే యాదృచ్ఛిక చలరాశి అయితే ప్రతి $s, t \geq 0$ లకు $P(T \leq t + s \mid T > t) = P(T \leq s)$. దీనినే ఈ విభాజనం యొక్క "పరాకు" (forget ful) లక్షణమని అనడం పరిపాటి. దీని పర్యవసానంగా (0, t] లో సంఘటన సంభవించలేదని తెలిసినా, (0, s + t] లోనైనా సంఘటన సంభవించే షరతు సంభావ్యత, s సమయంలోపు సంభవించే తొలి సంభావ్యతకు సమానమవుతుంది. మనం పాయిజాన్ సంఘటనలను గురించి మాట్లాడేటప్పుడు ఏ సమయం వద్ద నుంచి అయినా సంఘటన సంభవించడానికి పట్టే నిరీక్షణా కాలం యొక్క సంభావ్యతా విభాజనము 'ఋణఘాత విభాజనం'గా తీసికొంటాము.

*3.3.3 నిరీక్షించుకాల విభాజనము* (waiting time distribuiton) : కొన్ని పరిస్థితులలో నిర్ణీత సంఘటనలు సంభవించడానికి పట్టే వ్యవధి యొక్క విభాజనంతో అవసరం ఏర్పడుతుంది. n వ పాయిజాన్ సంఘటన సంభవించడానికి నిరీక్షించుకాలము

$W_n$ తో సూచిస్తే, $W_n = \sum_{r=1}^{n} T_r$. సిద్ధాంతం (3.3.3) ప్రకారం $T_r$, ($r = 1, 2, \ldots, n$) లు ఒకే ఋణఘాత విభాజనాన్ని అనుసరించే n పరస్పర స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులు కాబట్టి ఘాత విభాజనపు సంకలన లక్షణం (additive property) దృష్ట్యా $W_n$ యొక్క విభాజనము n, λ పరామితులతో గామా (gamma) విభాజన మవుతుంది. దీని సంభావ్యతా సాంద్రతా ప్రమేయము

$$\left.\begin{aligned} f_{W_n}(t) &= \frac{\lambda^n}{n!} t^{n-1} e^{-\lambda t}, \qquad \lambda > 0, t > 0 \\ &= 0 \\ E(W_n) &= \frac{n}{\lambda}, \text{Var}.(W_n) = \frac{n}{\lambda^2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots 3.3.18$$

దీనినే 'నిరీక్షించు కాల' విభాజనమంటారు.

(3.3.18) ని కింది విధంగా కూడా నిరూపించవచ్చు. t సమయం వద్ద n వ సంఘటన సంభవించిందనుకోవడం, t సమయానికి సంభవించిన సంఘటనల సంఖ్య కనీసం n అనడం ఒకటే. అంటే, $[W_n \le t] \equiv [X_t \ge n]$.

$$\therefore \quad F_{W_n}(t) = P(W_n \le t) = P(X_t \ge n)$$

$$= \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

రెండువైపుల t దృష్ట్యా అవకలనం చేస్తే $W_n$ యొక్క సంభావ్యతా సాంద్రతా ప్రమేయము

$$f_{W_n}(t) = -\sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + \sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} - \sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

*3.3.4 ఏకరూప విభాజనము :* పాయిజాన్ ప్రక్రియకు, ఏకరూప (uniform) విభాజనానికి గల సంబంధాన్ని పరిశీలిద్దాము.

*సిద్ధాంతము* 3.3.6 : $(0, \tau)$ లో ఒక పాయిజాన్ సంఘటన సంభవించిందని తెలిస్తే, అదే కాలంలో మరో సంఘటన సంభవించడానికి పట్టే వ్యవధి యొక్క విభాజనము

$$P(t < T < t + dt \mid X_\tau = 1) = \frac{dt}{\tau}, \quad 0 < t < \tau \qquad \ldots 3.3.19$$

*నిరూపణ :* ఈ సిద్ధాంతంలో

$$P(t < T < t + dt \mid X_\tau = 1) = \frac{P(t < T < t + dt, X_\tau = 1)}{P(X_\tau = 1)}$$

$$= P(t < T < t + dt) \,.\, P(X_\tau = 1 \mid T = t) \div P(X_\tau = 1)$$

$$= \lambda e^{-\lambda t} dt \,.\, e^{-\lambda(\tau - t)} \div (\lambda \tau) e^{-\lambda \tau}$$

$$= \frac{dt}{\tau}$$

దీనితో సిద్ధాంతం 3.3.6 నిరూపించినాము.

$(0, \tau)$ లో $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \tau$ అయ్యేటట్లు $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ల వద్ద n పాయిజాన్ సంఘటనలు సంభవించాయని అనుకొంటే, $(0, \tau)$ లో $t_1, t_2, \ldots, t_n$లు n యాదృచ్ఛిక కాలబిందువులు అవుతాయి. సిద్ధాంతం 3.3.6 దృష్ట్యా, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ లు $(0, \tau)$ లో ఏకరూప విభాజనాన్ని అనుసరించే n క్రమ సాంఖ్యకాలు (Order Statistics) అనుకోవచ్చు. $(0, \tau)$ లో ఏకరూప విభాజనాన్ని అనుసరించే n స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులు $U_1, U_2, \ldots, U_n$ యొక్క ఉమ్మడి విభాజనము

$$f_{U_1, \ldots, U_n}(u_1, \ldots, u_n) = \frac{1}{\tau^n}, \quad 0 \leq u_1, \ldots, u_n \leq \tau.$$

కాని $U_1, \ldots, U_n$ లకు సంబంధించే n క్రమ సాంఖ్యకాలు $t_1, \ldots, t_n$ యొక్క ఉమ్మడి

విభాజనము

$$f_{t_1, \ldots, t_n}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{n!}{\tau^n}, \quad 0 \le x_1 \le \ldots$$

$$\le x_n \le \tau . \quad (3.3.20)$$

$(0, \tau)$ లో n సంఘటనలు సంభవించాయని తెలిసి, ఈ అంతరంలో మరెక్కడ ఏ సంఘటన సంభవించకుండా, $(\tau_1, \tau + \triangle \tau_1), \ldots\ldots, (\tau_n, \tau_n + \triangle \tau_n)$ వంటి n వివర్జిత స్వల్ప అంతరాలలోనే ఒక్కొక్క సంఘటన సంభవించే షరతు సంభావ్యత

$$\frac{\lambda \triangle \tau_1 e^{-\lambda \triangle \tau_1} \ldots \lambda \triangle \tau_n e^{-\lambda \triangle \tau_n} e^{-\lambda(\tau - \triangle \tau_1 - \ldots - \triangle \tau_n)}}{\frac{(\lambda \tau)^n e^{-\lambda \tau}}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{\tau^n} \triangle \tau_1 \ldots \triangle \tau_n .$$

సంకేతాలలో, $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ ల వద్ద వరసగా n సంఘటనలు జరిగి ఉంటే,

$$P(\tau_1 \le t_1 \le \tau_1 + \triangle \tau_1, \ldots, \tau_n \le t_n \le \tau_n + \triangle \tau_n \; X_\tau = n)$$

$$= \frac{n!}{\tau^n} \triangle \tau_1 \ldots \triangle \tau_n$$

సంభావత్యా సాంద్రతా ప్రమేయపు నిర్వచనం ప్రకారం, ఎడమవైపు సంభావ్యత ఉజ్జాయింపుగా $f_{t_1, \ldots, t_n}(\tau_1, \ldots, \tau_n) \triangle \tau_1, \ldots \triangle \tau_n$ కు సమాన మవుతుంది. కాబట్టి,

$$f_{t_1, \ldots, t_n}(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \frac{n!}{\tau^2}, \quad 0 \le \tau_1 \le \ldots$$

$$\le \tau_n \le \tau . \quad \ldots 3.3.21$$

(3.3.20), (3.3.21) ల దృష్ట్యా (0, $\tau$) లో ఏకరూప విభాజనాన్ని అనుసరించే n స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులకు సంబంధించిన క్రమ సాంఖ్యకాల ఉమ్మడి విభాజనము

$\frac{n!}{\tau^n}$లో, అదే అంతరంలో ఏ కాలబిందువులు $t_1, \ldots, t_n$ వద్ద n పాయిజాన్ సంఘటనలు సంభవిస్తాయో, ఆ $t_1, \ldots, t_n$ ల యొక్క ఉమ్మడి విభాజనం ఏకీభవిస్తుంది.

పై చర్చ ఆధారంగా ఏదైనా పరిశీలనలో ఎదురైన కొన్ని సంఘటనలు పాయిజాన్ సంఘటనలా ? కావా ? అన్న వాదనను పరీక్షించే విధానాన్ని రూపొందించవచ్చు. లేదా భౌతిక దృగ్విషయాలను పరిశీలించేటప్పుడు దానిని రూపకల్పన చేసే ప్రక్రియ పాయిజాన్ ప్రక్రియగా తీసుకోవచ్చు అనే పరికల్పన (hypothesis) ను పరీక్షించడానికి పై ఫలితం సహాయ పడుతుంది.

ప్రక్రియను పరిశీలించేటప్పుడు $\tau$ వ్యవధిలో, అంటే $(0, \tau]$ లో n సంఘటనలు సంభవించాయనీ, ఈ n సంఘటనలు కూడా $0 < t_1 < \ldots < t_n < \tau_n$ అయ్యేటట్లు వరసగా $t_1, \ldots, t_n$ సమయాలవద్ద సంభవించాయనీ అనుకొందాము. ఇవి పాయిజాన్ సంఘటనలే అనే పరికల్పన సరి అయిండి అయితే, పై చర్చ ప్రకారం $t_1, t_2, \ldots, t_n$ లు $(0, \tau]$ లో ఏకరూప విభాజనాన్ని అనుసరించే n స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులు అవుతాయి. కాబట్టి $t_1, t_2, \ldots, t_n$ లు-$(0, \tau]$ లో n స్వతంత్ర ఏకరూప యాదృచ్ఛిక చలరాశులు అనే పరికల్పనను పరీక్షించడం, n సంఘటనలు పాయిజాన్ సంఘటనలే అనే పరికల్పనను పరీక్షించినట్లే అవుతుంది.

$(0, \tau]$ లో t' లు n స్వతంత్ర ఏకరూప యాదృచ్ఛిక చలరాశులు అయి,

$E(t_i) = \frac{\tau}{2}$, $V(t_i) = \frac{\tau^2}{12}$ $(i = 1, \ldots, n)$ అయితే, కేంద్రీయ సీమా

సిద్ధాంతం ప్రకారం $S_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$ అనే సాంఖ్యకము అవధిలో సామాన్య విభాజనాన్ని

అనుసరిస్తూ, $E(S_n) = \frac{n\tau}{12}$, $V(S_n) = \frac{n\tau^2}{12}$, కాబట్టి $S_n$ ఆధారంగా పై

పరికల్పన గురించి తీర్పు విచారించవచ్చు.

పై ప్రకరణంలో t అవిచ్ఛిన్న పరామితి అనుకొని పాయిజాన్ సంఘటనలగురించి సమగ్రంగా చర్చించాము. t విచ్ఛిన్న పరామితి అనుకొని $t = 0, 1, 2, \ldots$ అనే పూర్ణకాల బిందువుల వద్దనే సంఘటనలు సంభవిస్తాయని ఊహిద్దాము. ఒక కాలబిందువు వద్ద సంఘటన జరిగే సంభావ్యతను $p$ $(0 \leq p \leq 1)$ తోను, జరగని సంభావ్యతను $q$ $(= 1 - p)$ తోను సూచిద్దాము. ఇక్కడ సంఘటనలు స్వతంత్రాలని అనుకొంటాము. $(0, n]$ లో సంభవించిన సంఘటనల సంఖ్య $X_n$ అయితే, పై పరికల్పన దృష్ట్యా $X_n$ ద్విపద విభాజనాన్ని అనుసరించే యాదృచ్ఛిక చలరాశి అవుతుంది. దీని విభాజనము

$$P(X_n = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots n$$

కాబట్టి $\{X_n\}$ బెర్నౌలీ ప్రక్రియ అవుతుంది.

$t = 0, 1, 2, \ldots$ ల వద్దనే సంఘటనలు స్వతంత్రంగా సంభవిస్తాయనే ఉప కల్పన ఆధారంగా, సంఘటనల మధ్య పట్టే వ్యవధి విభాజనాన్ని పరిశీలిద్దాము. $(n-1)$ వ సంఘటన సంభవించిన తరవాత $n$ వ సంఘటన జరగడానికి పట్టే కాలవ్యవధి $T_n$ తో సూచిస్తే, $T_n$ జ్యామితీయ విచ్ఛిన్నయాదృచ్ఛిక చలరాశి అని స్పష్ట మవుతుంది. దీని సంభావ్యతా విభాజనము

$$P(T_n = x) = q^{x-1} p \quad , \quad x = 1, 2, \ldots$$

ఇదేవిధంగా $n$ వ సంఘటన సంభవించడానికి పట్టే నిరీక్షణా కాలము

$W_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ . ఇది విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి. $n$ వ సంఘటన $x$ వ కాలబిందువు వద్ద సంభవించిందనుకోండి. అంటే, $(n-1)$ వ సంఘటన $(x-1)$ వ కాలబిందువు వద్దను, $n$ వ సంఘటన $x$ వ కాలబిందువు వద్ద సంభవించవచ్చు. దీని సంభావ్యత మొదటి $(x-1)$ ల వద్ద $n-1$ సంఘటనలూ, $x$ వద్ద $n$ వ సంఘటన జరిగే సంభావ్యతకు సమానం కాబట్టి

$$P(W_n = x) = \binom{x-1}{n-1} p^{n-1} q^{(x-1)-(n-1)} \cdot p$$

$$= \binom{x-1}{n-1} p^n q^{x-n}$$

$$= \binom{-n}{x-n} p^n (-q)^{x-n} .$$

ఇది $n, p$ పరామితులుగాగల ఋణ ద్విపద (Negative Binomial) సంభావ్యతా విభాజనము.

*3.3.5 పాయిజాన్ ప్రక్రియల లక్షణాలు :* $\{X_t, t \geq 0\}$ అనే పాయిజాన్ ప్రక్రియను పరిశీలిద్దాము. దీని పరామితి $\lambda$ అనీ, సంభవించే పాయిజాన్ సంఘటనను రెండు రకాలుగా వర్గీకరణ చేశామనుకోండి. అంటే సంభవించిన సంఘటనను $p$ సంభావ్యతతో 'I రకం సంఘటన' అనీ $1 - p = q$ సంభావ్యతతో 'II రకం సంఘటన' అనీ వర్గీకరించామనుకోండి. ఉదాహరణకు, కిరాణా స్టోరును ప్రవేశించే కొనుగోలుదార్ల సంఖ్యకు $\lambda$

పరామితితో పాయిజాన్ ప్రక్రియను నమూనాగా తీసికొంటే, పురుషుని ప్రవేశాన్ని $p=\frac{1}{2}$ సంభావ్యతతో I రకం సంఘటనగాను, స్త్రీ ప్రవేశాన్ని $\frac{1}{2}$ సంభావ్యతతో II రకం సంఘటనగాను వర్గీకరించవచ్చు.

$(0, t]$ లో సంభవించిన రెండు రకాల సంఘటనల సంఖ్యలను వరసగా $X_t^{(1)}, X_t^{(2)}$ లతో సూచిస్తే, $X_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)}$.

*లక్షణము* 3.3.7 : $\{X_t^{(1)}, t \geq 0\}$, $\{X_t^{(2)}, t \geq 0\}$ లు రెండూ వరసగా $\lambda p, \lambda q$ పరామితులతో పాయిజాన్ ప్రక్రియలు. ఇవి రెండు స్వతంత్ర ప్రక్రియలు.

*నిరూపణ :* ముందు $X_t^{(1)}, X_t^{(2)}$ ల ఉమ్మడి సంభావ్యతను పరిశీలిద్దాము.

$$P\left(X_t^{(1)} = n,\ X_t^{(2)} = m\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} P\left(X_t^{(1)} = n,\ X_t^{(2)} = m \mid X_t = j\right) . P\left(X_t = j\right)$$

కాని $j \neq n+m$ అయితే,

$$P\left(X_t^{(1)} = n,\ X_t^{(2)} = m \mid X_t = j\right) = 0$$

$$\therefore \quad P\left(X_t^{(1)} = n,\ X_t^{(2)} = m\right)$$

$$= P\left(X_t^{(1)} = n,\ X_t^{(2)} = m \mid X_t = n+m\right).$$

$$\times\ P\left(X_t = n+m\right)$$

$(0, t]$ లో $n+m$ సంఘటనలు సంభవించాయనుకొందాము. మొదటి రెండు రకాల సంఘటనలు వరసగా $p, 1-p$ సంభావ్యతలతో సంభవిస్తే, I రకానికి సంబంధించి $n$, II రకానికి సంబంధించి $m$ సంఘటనలు జరిగే షరతు సంభావ్యత ద్విపద సంభావ్యత $\binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m$ కు సమానము. కాబట్టి

$$P\left(X_t^{(1)} = n,\ X_t^{(2)} = m\right)$$

$$= \binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!}$$

$$= e^{-\lambda t p} \frac{(\lambda p t)^n}{n!} e^{-\lambda t(1-p)} \frac{\{\lambda t (1-p)\}^m}{m!}$$

దీని నుంచి

$$P\left(X_t^{(1)} = n\right) = \sum_{m=0}^{\infty} P\left(X_t^{(1)} = n,\ X_t^{(2)} = m\right)$$

$$= e^{-\lambda pt} \frac{(\lambda pt)^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda(1-p)t} \frac{\{\lambda t(1-p)\}^m}{m!}$$

$$= e^{-\lambda pt} \frac{(\lambda pt)^n}{n!}$$

ఇదేవిధంగా,

$$P\left(X_t^{(2)} = m\right) = e^{-\lambda(1-p)t} \frac{\{\lambda(1-p)t\}^m}{m!}$$

$\therefore \left\{X_t^{(1)}, t \geq 0\right\}, \left\{X_t^{(2)}, t \geq 0\right\}$ లు రెండూ వరసగా $\lambda p,\ \lambda(1-p)$ పరామితులతో పాయిజాన్ ప్రక్రియ పై ఉమ్మడి సంభావ్యత, ఉపాంత సంభావ్యతల లబ్ధానికి సమానం కాబట్టి పై రెండు పాయిజాన్ ప్రక్రియ స్వతంత్ర ప్రక్రియలని చెప్పవచ్చు.

3.3.6 *పాయిజాన్ ప్రక్రియకు సాధారణీకరణము* (generalization): ఈ ప్రకరణంలో పాయిజాన్ ప్రక్రియ యొక్క రెండు సాధారణీకరణాలను పరిశీలిద్దాము.

(A) వైజాతీయ (non-homogeneous) పాయిజాన్ ప్రక్రియ :

పాయిజాన్ ప్రక్రియలోని సంఘటనల సంభవరేటు $\lambda$ ను సంభవకాలం $t$ పై ఆధారపడునట్లు చేసి మొదటి సాధారణీకరణాన్ని రూపొందిస్తాము. దీనిని వైజాతీయ non-homogeneous or non-stationary) పాయిజాన్ ప్రక్రియ అంటారు.

*నిర్వచనము* 3 3.8 కింది నియమాలననుసరించే గణన ప్రక్రియ $\{X_t, t \geq 0\}$ ను $\lambda(t)$ తీవ్రతా ప్రమేయంగాగల వైజాతీయ పాయిజాన్ ప్రక్రియ అంటారు.

(i) $X_0 = 0$

(ii) $\{X_t, t \geq 0\}$ స్వతంత్ర పెరుగుదలలుగల ప్రక్రియ

(iii) $(t, t + \Delta t)$ లో ఒక్క సంఘటన సంభవించే సంభావ్యత

$\lambda(t)\Delta t + O(\Delta t)$. అంటే,

$$P(X_{t+\Delta t} - X_t = 1) = \lambda(t)\Delta t + O(\Delta t)$$

(iv) $(t, t+\Delta t)$ లో ఒకటికంటే ఎక్కువ సంఘటనలు జరిగే సంభావ్యత $O(\Delta t)$. అంటే,

$$\sum_{j \geq 2} P(X_{t+\Delta t} - X_t = j) = O(\Delta t).$$

(iii) దృష్ట్యా

$$\underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{1 - P(X_{t+\Delta t} - X_t = 0)}{\Delta t} = \lambda(t)$$

పాయిజాన్ ప్రక్రియలో $\lambda t$ ఒక స్థిరాంకము $\lambda$. $m(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds$ గా సూచించి, పై నియమాల ఆధారంగా,

$$P(X_{t+s} - X_t = m) = e^{-\{m(t+s) - m(t)\}} \cdot \frac{\{m(t+s) - m(t)\}^n}{n} \quad (n \geq 0)$$

అని నిరూపించవచ్చు. (3.3.22) ప్రకారం $X_{t+s} - X_t$ అనే (3.3.23) యాదృచ్ఛిక చలరాశి సగటు $m(t+s) - m(t)$ గా గల పాయిజాన్ విభాజనాన్ని అనుసరిస్తుంది. ఇక్కడ $m(t)$ ని ప్రక్రియ యొక్క సగటు మూల్య ప్రమేయము (mean value function) అంటారు. పాయిజాన్ ప్రక్రియలో $\lambda(t) = \lambda$, $m(t) = \lambda t$ అవుతాయి.

సిద్ధాంతము 3.3.2 లో వలెనే ముందు s ని స్థిరీకరించి (3.3.23) ను నిరూపిద్దాము.

$$p_n^{(t)} = P(X_{t+s} - X_s = n)$$

$n = 0$ అయితే,

$$p_0^{(t+\Delta t)} = P(X_{s+t+\Delta t} - X_s = 0)$$

$$= P\{(s, s+t] \text{ లో } 0 \text{ సంఘటనలు}, (s+t, s+t+\Delta t] \text{ లో } 0 \text{ సంఘటనలు సంభవించడం}\}$$

$$= P\{(s, s+t] \text{ లో } 0 \text{ సంఘటనలు సంభవించడం}\}.$$

$$\times P\{(s+t, s+t+\Delta t] \text{ లో } 0 \text{ సంఘటనలు సంభవించడం}\}$$

$$= p_0^{(t)} [1 - \lambda(s+t)\Delta t + O(\Delta t)] \quad (\because \text{ పై నియమాలు})$$

$$\therefore \quad \frac{p_0^{(t+\Delta t)} - p_0^{(t)}}{\Delta t} = -\lambda(s+t)\, p_0^{(t)} + \frac{O(\Delta t)}{\Delta t}$$

$\Delta t \longrightarrow 0$ అయితే, అవధిలో

$$p_0'^{(t)} = -\lambda(s+t)\, p_0^{(t)}$$

లేదా,

$$\log p_0^{(t)} = -\int_0^t \lambda(s+u)\, du$$

$$= -\int_s^{s+t} \lambda(y)\, dy$$

$$= -\{m(s+t) - m(s)\}.$$

$$\therefore \quad p_0^{(t)} = e^{-\{m(s+t) - m(s)\}}$$

ఇదేవిధంగా ప్రతి $n > 0$ కు (3.3.23) ను నిరూపించండి. వైజాతీయ పాయిజాన్ ప్రక్రియలో ఉన్న ప్రత్యేకత ఏమంటే, ఒకే పొడవుగల కాలాంతరాలలో సంభవించిన సంఘటనల సంఖ్య సమంగా ఉండాలనే నియమానికి కట్టుబడి స్థావర పెరుగుదలలుగల ప్రక్రియ అన్న ఉపకల్పన చేయనవసరంలేదు.

## (B) సంయుక్త పాయిజాన్ ప్రక్రియ (Compound Poisson Process) :

*నిర్వచనము 3.3.9 :* $X_t$ ని కింద విధంగా రూపొందించగలిగి నప్పుడు $\{X_t, t \geq 0\}$ ప్రక్రియను సంయుక్త పాయిజాన్ ప్రక్రియ అంటారు.

ప్రతి, $t \geq 0$ కు, $$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} y_i \qquad \ldots 3.3.24$$

ఇక్కడ i. $\{N_t, t \geq 0\}$ పాయిజాన్ ప్రక్రియ;

ii. $Y_1, Y_2, Y_n, \ldots,$ లు ఒకే విభాజనాన్ని అనుసరించే స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులు. $\{Y_n, n \geq 1\}$ కూడా $\{N_t, t \geq 0\}$ తో స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశుల అనుక్రమము.

ఉదాహరణకు, (a) $Y_i = 1$ అయితే, $X_t = N_t$. $\{X_t, t \geq 0\}$ మామూలు పాయిజాన్ ప్రక్రియ అవుతుంది.

(b) బస్సులు స్టాండును ప్రవేశించడం పాయిజాన్ ప్రక్రియా నమూనాను అనుసరిస్తే, ప్రతి బస్సులోని ప్రయాణీకుల సంఖ్య ఒకే విభాజనాన్ని అనుసరించే స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులు అవుతాయి. ఇక్కడ

$Y_t$ : i వ బస్సులోని ప్రయాణీకుల సంఖ్య;

$X_t$ : t సమయానికి స్టాండును ప్రవేశించిన ప్రయాణీకుల సంఖ్య అయితే,

$\{X_t, t \geq 0\}$ సంయుక్త పాయిజాన్ ప్రక్రియ అవుతుంది.

(c) కొనుగోలుదార్లు సూపరుబజార్ వదలి వెళ్లడం పాయిజాన్ ప్రక్రియా నమూనాను పాటిస్తుందనుకొంటే,

$Y_i$ : i వ కొనుగోలుదారు ఖర్చుపెట్టే మొత్తము

$X_t$ : t సమయానికి అయిన ఖర్చులేదా కొనుగోలు మొత్తము.

ఇప్పుడు సంయుక్త పాయిజాన్ ప్రక్రియ యొక్క అంకమధ్యమము, విస్తృతులను కనుక్కోవడాన్ని పరిశీలిద్దాము.

$$E(X_t) = E\{E(X_t \quad N_t)\}$$

కాని $$E(X_t \quad N_t = n) = E\left\{\sum_{i=1}^{N_t} Y_i \quad N_t = n\right\}$$

$$= E\left\{\sum_{1}^{n} Y_i\right\} \quad (\because Y' \text{ లు}, N_t \text{ లు స్వతంత్రాలు})$$

$$= n\,E(Y_1)$$

$$\therefore \quad E(X_t \mid N_t) = N_t\, E(Y_1)$$

$$E(X_t) = E(N_t)\,.\,E(Y_1)$$

$$= \lambda t\,.\,E(Y_1) \qquad \ldots 3.3\ 25$$

షరతు విస్తృతి (conditional variance) సూత్రాన్ని ఉపయోగించి,

$$\text{Var.}(X_t) = E\{\text{Var.}(X_t \mid N_t)\} + \text{Var.}\{E(X_t \mid N_t)\}.$$

కాని, $\text{Var.}(X_t \mid N_t = n) = \text{Var.}\left\{\sum_1^n Y_i\right\} = n\,\text{Var.}(Y_1)$

$$\text{Var.}(X_t \mid N_t) = N_t\,\text{Var.}(Y_1).$$

$$\therefore \quad \text{Var.}(X_t) = E(N_t)\,.\,\text{Var}(Y_1) + \text{Var.}[N_t E(Y_1)]$$

$$= \lambda t\,.\,\text{Var}(Y_1) + \{E(Y_1)\}^2\,\text{Var}(N_t)$$

$$= \lambda t\,[\text{Var}(Y_1) + \{E(Y_1)^2\}]$$

$$= \lambda t\,E(Y_1^2) \qquad \ldots 3.3.26$$

$Y_1$ యొక్క విభాజనం తెలిస్తే, (3.3.25), (3.3.26) ల నుండి (3.3.24) లోని సంయుక్త పాయిజాన్ ప్రక్రియ యొక్క అంక మధ్యమము, విస్తృతులను కనుక్కోవచ్చు.

## 3.4 శుద్ధ జనన ప్రక్రియ (Pure birth Process)

పాయిజాన్ ప్రక్రియ పరిశీలించేటప్పుడు, $(t, t+\Delta t]$ అంతరంలో సంఘటన సంభవించే సంభావ్యత $\lambda \Delta t + O(\Delta t)$, $(0, t]$ అంతరంలో సంభవించే సంఘటనల సంఖ్య n పై ఆధారపడని స్థిరాంకంగా అనుకొన్నాము. కాని ఈ సంభావ్యత n పై ఆధారపడునట్లు చేసి, పాయిజాన్ ప్రక్రియను ఒకవైపుగా సాధారణీకరణం చేయడం వల్ల ఏర్పడే మరో సామాన్య మార్కోవ్ ప్రక్రియను ఇప్పుడు పరిశీలిద్దాము. ఉదాహరణకు, జీవాణువుల లోని పునరుత్పత్తికి సంబంధించి ఒక నిర్ణీత సమయాన కొత్త జీవాణువు జన్మించే సంభావ్యత అప్పటివరకు ఉన్న జీవాల సమూహపు పరిమాణంపై ఆధారపడడం సమంజసమే.

$\{\lambda_n\}$ అనే $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ ధనాంకాల యొక్క అనుక్రమాన్ని తీసికోండి. కింది స్వీకృతాలను తృప్తిపరచే సజాతీయ మార్కోవ్ ప్రక్రియ $\{X_t\}$ ను శుద్ధ

జనన ప్రక్రియ (pure birth process) గా నిర్వచిస్తాము. ఇక్కడ $(0, t]$ లో సంభవించిన $n$ సంఘటనలను (జననాలు - births) $X_t$ తో సూచించామనుకోండి.

(a) $(t, t+\Delta t]$ లో ఒకే సంఘటన సంభవించే సంభావ్యత $\lambda_n \Delta t + O(\Delta t)$.

అంటే $t$ సమయం వరకు సంభవించే జననాల సంఖ్య $X_t$ అయితే,

$$P(X_{t+\Delta t} - X_t = 1 \mid X_t = n) = \lambda_n \Delta t + O(\Delta t)$$

(b) $(t, t+\Delta t]$ లో జననం సంభవించని సంభావ్యత $1 - \lambda_n \Delta t + O(\Delta t)$

అంటే, $P(X_{+\Delta t} - X_t = 0 \mid X_t = n) = 1 - \lambda_n \Delta t + O(\Delta t)$.

(c) తొలిలో జననాల సంఖ్య సున్న, అంటే $X_0 = 0$.

పై నియమాల ననుసరించి కింది నియమాన్ని సరిచూడవచ్చు :

Acc No. M5UC

(d) $(t, t+\Delta t]$ లో ఒక జననం కంటె ఎక్కువ సంభవించే సంభావ్యత $O(\Delta t)$. అంటే,

31
2470

$$\sum_{j>1}^{\infty} P(X_{t+\Delta t} - X_t = j \mid X_t = n) = O(\Delta t).$$

72250

పై (a), (b) లను సజాతీయ సంక్రమ సంభావ్యతలలో వ్రాస్తే,

$$\left.\begin{aligned} p_{nn+1}^{(\Delta t)} &= p_{nn+1}(t, t+\Delta t) = \lambda_n \Delta t + O(\Delta t) \\ p_{nn}^{(\Delta t)} &= p_{nn}(t, t+\Delta t) = 1 - \lambda_n \Delta t + O(\Delta t). \end{aligned}\right\} \quad \ldots 3.4.1$$

(3.4.1) లోని సంభావ్యతలు $t$ పై ఆధారపడకుండా ఉండడం గ్రహించవలె.

$p_n^{(t)} = P(X_t = n)$ అనుకొని, (3.3.2) ఉపయోగించి, (3.3.6), (3 3.7) ల వలె వ్రాస్తే,

$$p_0^{(t+\Delta t)} = p_0^{(t)}[1 - \lambda_n \Delta t + O(\Delta t)] \quad \ldots 3.4.2$$

$$p_n^{(t+\Delta t)} = p_n^{(t)}[1 - \lambda_n \Delta t + O(\Delta t)] + p_{n-1}^{(t)}[\lambda_{n-1} \Delta t + O(\Delta t)] + O(\Delta t) \quad (n > 0) \quad \ldots 3.4.3$$

(3.3.8), (3.3.9) లను దృష్టిలో పెట్టుకొని, (3.4.2), (3.4.3) లను

కింది విధంగా వ్రాస్తాము.

$$p_0'^{(t)} = -\lambda_0 p_0^{(t)} \qquad \ldots 3.4.4$$

$$p_n'^{(t)} = -\lambda_n p_n^{(t)} + \lambda_{n-1} p_{n-1}^{(t)} \quad (n > 0) \qquad \ldots 3.4.5$$

తొలి నియమము $p_0^{(0)} = 1$ ద్వారా (3.4.4) అవకలన సమీకరణాన్ని సాధించి వ్రాస్తే,

$$p_0^{(t)} = e^{-\lambda_0 t} > 0$$

ప్రతి $n > 0$ కు, $p_n^{(0)} = 0$ అనే తొలి నియమాన్ని ఉపయోగించి (3 4.5) అవకలన సమీకరణం యొక్క సాధనము

$$p_n^{(t)} = \sum_{r=0}^{n} a_n^{(r)} e^{-\lambda r t} \qquad (n \geq 0) \qquad \ldots 3.4.6$$

(3.4.6) లో $a_n^{(r)}$

$$= \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{(\lambda_0 - \lambda_r)(\lambda_1 - \lambda_r) \ldots (\lambda_{r-1} - \lambda_r)(\lambda_{r+1} - \lambda_r) \ldots (\lambda_n - \lambda_r)}$$

$i, i+1$ జననాల మధ్యగల వ్యవధిని $T_i$ తో సూచిస్తే,

$$p_n^{(t)} = P\left[\sum_{i=0}^{n-1} T_i \leq t < \sum_{i=0}^{n} T_i\right]$$

n వ జననానికి పట్టే నిరీక్షణాకాలము $W_n = \sum_{i=0}^{n-1} T_i$.

$$P(T_0 \leq x) = 1 - P\left\{(0, x] \text{ లో జనాలసంఖ్య} = 0\right\}$$

$$= 1 - P(X_n = 0) = 1 - e^{-\lambda_0 x}$$

అంటే, $T_0$ యాదృచ్ఛిక చలరాశి $\lambda_0$ పరామితిగాగల ఋణఘాత విభాజనాన్ని అనుసరిస్తుంది. పై స్వీకృతాలు (a) – (c) ల ఆధారంగాను, సిద్ధాంతము 3.3.3 దృష్ట్యా, $T_i$ $(i \geq 0)$ లు వరసగా $\lambda_i$ పరామితులు గల ఋణఘాత విభాజనాలను అనుసరించే పరస్పర స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులు అని చూడవచ్చు.

(3.4.6) లో $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ లను తగు విధంగా ఎన్నుకొంటే $p_n^{(t)} \geq 0$. కాని $\sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(t)} < 1$ సంభవం కావచ్చు. ప్రతి $t > 0$ కు సంబంధించి, $\{p_n^{(t)}, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ ప్రక్రియ యొక్క విభాజనము అవడానికి (అంటే, $\sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(t)} = 1$) $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty$ (3.4.7) అవశ్యక, పర్యాప్త నియమం* అవుతుంది.

*3.4.1 ఫ్యురీ - యూల్ ప్రక్రియ* (Furry - Yule Process) : శుద్ధ జనన ప్రక్రియలో $\lambda_n$ బదులు $\lambda n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ను ప్రతిక్షేపిస్తే వచ్చే ప్రక్రియ ఫ్యురీ - యూల్ ప్రక్రియ అంటారు. పునరుత్పత్తిలో కొత్త జీవాణువులకు జన్మ (రెండుగా కాని. అంతకంటె ఎక్కువగాగాని చీలినప్పుడు) నిచ్చే జీవాణువుల సమూహాన్ని పరిశీలించేటప్పుడు ఈ ప్రత్యేక సందర్భం ఎదురవుతుంది. $(t, t + \Delta t)$ లో వేర్వేరుగా జన్మనివ్వగల సంభావ్యత, $\lambda \Delta t + O(\Delta t)$ తో n జీవాణువులు ఉంటే, $(t, t + \Delta t)$ లో మరో కొత్త జీవాణువు జన్మించడానికి సంభావ్యత, సంకలన సంభావ్యతా సిద్ధాంతము (additive law of probability) ప్రకారం $\lambda n \Delta t + O(\Delta t)$. జన్మనిచ్చే జీవాణువులు మరణించకుండా పునరుత్పత్తిలో పాల్గొంటాయనుకొందాము. (3.4.7) నియమంలో $\lambda_n = \lambda n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ వ్రాస్తే,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right) = \infty$$

కాబట్టి (3.4.5) లో $\lambda_n = \lambda n$ వ్రాసి, $p_n^{(0)} = 0$ అనే తొలి నియమాన్ని ఉపయోగించి, ఆ అవకలన సమీకరణం యొక్క సాధనము

$$p_n^{(t)} = \sum_{r=1}^{n} a_n^{(r)} e^{-\lambda r t} \qquad (n > 0)$$

$$a_n^{(r)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n-1}{(1-r)(2-r)\ldots(r-1-r)(r+1-r)\ldots(n-r)}$$

---

*దీని నిరూపణ విషయంలో ఆసక్తికల చదువరులు "Introduction to probability and its applications by Feller, w ; vol. 1" ను సంప్రదించండి.

$$= \frac{(n-1)!\ (-1)^{r-1}}{(r-1)!\ (n-r)!}$$

$$= (-1)^{r-1} \binom{n-1}{r-1}$$

$$\therefore \quad P_n^{(t)} = P(X_t = n) = e^{-\lambda t} \sum_{r=1}^{n} \binom{n-1}{r-1} (-e^{-\lambda t})^{r-1}$$

$$= e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{n-1} \qquad \ldots 3.4.8$$

ఇది $p = e^{-\lambda t}$ పరామితిగాగల జ్యామితీయ సంభావ్యత.

తొలిలోని జీవాణువుల సంఖ్య i, అంటే $X_o = i$ అనుకొంటే,

(3.4.4), (3.4.5) ల ప్రకారం,

$$p_0'^{(t)} = -\lambda i\ p_0^{(t)} \qquad \ldots 3.4.9$$

$$p_n'^{(t)} = -\lambda(i+n)p_n^{(t)} + \lambda(i+n-1)p_{n-1}^{(t)}\ (n>0) \ldots 3.4.10$$

$p_i^{(0)} = 1,\ p_n^{(0)} = 0\ (n \neq i)$ అనే తొలి నియమాలను ఉపయోగించి,

(3.4.9), (3.4.10) లను సాధిస్తే, ప్రతి $n \geq i$ కి,

$$p_n^{(t)} = \binom{n-1}{n-i} e^{-i\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{n-i} \qquad \ldots 3.4.11$$

(3.4.11) ని (3.4.8) ద్వారా కూడా వ్రాయవచ్చు. తొలిలో సమూహపు పరిమాణము i అయితే, t సమయానికి దాని పరిమాణము i స్వతంత్ర జ్యామితీయ యాదృచ్ఛిక చలరాశుల సంకలనానికి సమానమవుతుంది. సంకలన లక్షణం దృష్ట్యా, i స్వతంత్ర జ్యామితీయ యాదృచ్ఛిక చలరాశుల సంకలనము, (3.4.11) లోని ఋణ ద్విపద విభాజనము (Negative Binomial ditstribution) ను అనుసరించే యాదృచ్ఛిక చలరాశి అవుతుంది.

పైన చర్చించిన ప్రక్రియ సజాతీయ మార్కోవ్ ప్రక్రియ కాబట్టి ప్రతి $t_2 > t_1 > 0;\ n \geq m$ లకు సంబంధించి

$$p_{mn}(t_1, t_2) = P(X_{t_2} - X_{t_1} = n \mid X_{t_1} = m)$$

$$= \binom{n-1}{n-m} e^{-m\lambda t}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{n-m}$$

$$= p_{mn}^{(t)} \qquad (t = t_2 - t_1)$$

$$\therefore \quad \underset{t \to \infty}{Lt} \; p_{mn}^{(t)} = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots ; m \leq n).$$

దీనినిబట్టి శుద్ధ జనన ప్రక్రియలో స్థితులన్నీ సంక్రమ లేదా సంశయ పునారావృత స్థితులు అవుతాయి.

## 3.5 శుద్ధ మరణ ప్రక్రియ (Pure death process) :

కొన్ని భౌతిక దృగ్విషయాలకు సంబంధించిన ప్రక్రియలలో పరిశీలనా ప్రారంభ దశ నుంచి సమూహపు పరిమాణం తగ్గడం (మరణించడం వల్ల గాని, మరో విధంగా గాని) సంభవిస్తుంది. ఉదాహరణకు, కిరణాస్టోరులోని నిల్వ సరుకును పరిశీలిస్తే, కొంతకాలానికి స్టోరు ఖాళీ కావడం ఆ తరవాత తిరిగి సరుకు నిల్వ చేయడం జరుగుతుంది. ఇటువంటి సందర్భాలకు శుద్ధ మరణ ప్రక్రియ గణిత నమూనాగా రూపొందుతుంది.

తొలిలో సమూహపు పరిమాణము $i\ (> 0)$ అయి, కొంతరేటున తగ్గుతూ (అంటే మరణాలు సంభవిస్తూ) ఉంటే, చివరికి శూన్యం అవుతుంది. సమూహపు పరిమాణము **n** అయినప్పుడు తగ్గు లేదా మరణరేటు $\mu_n$ అనుకొందాము. కింది స్వీకృతాలను తృప్తిపరచే సజాతీయ ప్రక్రియను శుద్ధ మరణ ప్రక్రియ (**pure death process**) అంటారు.

(a) $(t, t+\Delta t)$ లో మరణం సంభవించే సంభావ్యత $\mu_n \Delta t + O(\Delta t)$ కు సమానము. అంటే,

$$P\left(X_{t+\Delta t} - X_t = 1 \mid X_t = n\right) = \mu_n \Delta t + O(\Delta t).$$

(b) $(t, t+\Delta t)$ లో మరణం సంభవించదనే సంభావ్యత $1 - \mu_n \Delta t + O(\Delta t)$ కు సమానము. అంటే,

$$P\left(X_{t+\Delta t} - X_t = 0 \mid X_t = n\right) = 1 - \mu_n \Delta t + O(\Delta t).$$

(a), (b) ల దృష్ట్యా కింది నియమాన్ని సరిచూడవచ్చు.

(c) $(t, t+\Delta t)$ లో ఒకటి కంటె ఎక్కువ మరణాలు సంభవించే సంభావ్యత $O(\Delta t)$ కు సమానము. అంటే,

$$\sum_{j > 1} P\left(X_{t+\Delta t} - X_t = j \mid X_t = n\right) = O(\Delta t)$$

ఇంకా, $(t, t+\Delta t^{-}$ లో మరణం సంభవించడం, దీనికి ముందు మరణానికి మధ్య పట్టిన వ్యవధిపై ఆధారపడదని అనుకొందాము.

(a), (b) లను వరసగా సజాతీయ సంక్రమ సంభావ్యతలలో వ్రాస్తే,

$$\left.\begin{aligned} p_{nn-1}^{(\Delta t)} &= p_{nn-1}(t, t+\Delta t) = \mu_n \Delta t + O(\Delta t) \\ p_{nn}^{(\Delta t)} &= p_{nn}(t, t+\Delta t) = 1 - \mu_n \Delta t + O(\Delta t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots 3.5.1$$

(3.5.1) లోని సంభావ్యతలు t పై ఆధారపడకుండా ఉండడం గ్రహించవలె. $(0, t^{-}$, $t, t+\Delta t^{-}$ లలో సంభవించిన మార్పులను దృష్టిలో పెట్టుకొని, (3.3.2) ఉపయోగించి, కింది సమీకరణాలను వ్రాయవచ్చు :

$$p_i^{(t+\Delta t)} = p_i^{(t)}(1 - \mu_i \Delta t) + O(\Delta t) \quad \ldots 3.5.2$$

$$p_n^{(t+\Delta t)} = p_n^{(t)}(1 - \mu_n \Delta t) + \mu_{n+1} \Delta t \cdot p_{n+1}^{(t)} + O(\Delta t) \quad (n < i) \quad \ldots 3.5.3$$

(3.5.2), (3.5.3) ల నుండి

$$p_i^{\prime(t)} = -\mu_i p_i^{(t)} \quad \ldots 3.5.4$$

$$p_n^{\prime(t)} = -\mu_n p_n^{(t)} + \mu_{n+1} p_{n+1}^{(t)} \quad (n < i) \quad \ldots 3.5.5$$

ప్రత్యేకించి, $\mu_n = n\mu$ అయినప్పుడు, పై అవకలన సమీకరణాల సాధనం కింది రూపంలో ఉంటుంది.

$$p_n^{(t)} = \binom{i}{n} e^{-\mu t n} (1 - e^{-\mu t})^{i-n} \quad (n \leq i) \quad \ldots 3.5.6$$

(3.5.6) ను i, $p = e^{-\mu t}$ పరామితులుగాగల ద్విపద విభాజనమని గుర్తించండి. (3.5.6) సంభావ్యతలతో $\{X_t, t \geq 0\}$ ద్విపద ప్రక్రియ అవుతుంది.

ప్రారంభ దశలో ఉన్న సమూహంలో యూనిట్లను బెర్నౌలీ ప్రయత్నాల అనుక్రమాన్ని ప్రవేశపెట్టేవిగా తలంచి కూడా t క్షణం వద్ద సమూహ పరిమాణము $X_t$ యొక్క విభాజనాన్ని కనుక్కోవచ్చు. ప్రారంభ దశలోని సమూహపు యూనిట్ల జీవితకాల (life time) విభాజనము ఋణఘాత విభాజనం, దాని అంక మధ్యమము $\frac{1}{\mu}$ అనుకొందాము t క్షణంవద్ద ఉన్న n యూనిట్లలోను ప్రతిదానికి సంబంధించి $(t, t+\Delta t^{-}$ లో అది మరణించే

సంభావ్యత $\mu \Delta t + O(\Delta t)$ అవుతుంది. ఈ మరణాలు ఒకదానితో మరొకటి ప్రమేయం లేకుండా సంభవిస్తాయని అనుకొంటూ, $(t, t + \Delta t]$ లో సంభవించే మరణాల విభాజనాన్ని క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు :

$$P\{(t, t+\Delta t] \text{ లో ఏది మరణించదు}\} = [1 - \mu\Delta t + O(\Delta t)]^n$$

$$= 1 - n\mu\Delta t + O(\Delta t) \qquad \ldots 3.5.7$$

$$P\{(t, t+\Delta t] \text{ లో ఒకటి మాత్రమే మరణించడం}\}$$

$$= (\mu \Delta t + O(\Delta t))(1 - \mu \Delta t + O(\Delta t))^{n-1}$$

$$= n\mu \Delta t + O(\Delta t) \qquad \ldots 3.5.8$$

$$P\{(t, t+\Delta t] \text{ లో } j\ (> 1) \text{ మరణాలు సంభవించడం}\}$$

$$= \binom{n}{j} [\mu \Delta t + O(\Delta t)]^j [1 - \mu \Delta t + O(\Delta t)]^{n-j}$$

$$= O(\Delta t) \qquad \ldots 3.5.9$$

(3.5.7) — (3.5.9) లను నిశితంగా పరిశీలిస్తే, ఇవి శుద్ధమరణ ప్రక్రియ నమూనాకు సంబంధించిన స్వీకృతాల అర్థాన్ని ఇస్తాయి. యూనిట్ లేదా సభ్యుని జీవితకాలంయొక్క విభాజనము ఋణఘాత విభాజనమనుకొన్నాము. అందువల్ల బెర్నౌలీ ప్రక్రియలో t క్షణానికి ముందే మరణం సంభవించే సంభావ్యత $p = e^{-\mu t}$, సభ్యుని జీవితకాలం t ని మించదనే సంభావ్యత $1 - e^{-\mu t}$ తో ఏకీభవిస్తుంది. కాబట్టి t క్షణానికి మరణం సంభవించని సంభావ్యత $q = 1 - p = e^{-\mu t}$,

$$\therefore \quad p_n^{(t)} = P(X_t = n) = \binom{i}{n} e^{-\mu t n} (1 - e^{-\mu t})^{i-n}$$

$$\left.\begin{aligned} E(X_t) &= i\, e^{-\mu t} \qquad (n \le i) \\ \text{Var.}(X_t) &= i\, e^{-\mu t}(1 - e^{-\mu t}) \end{aligned}\right\} (3.5.10)$$

## 3.6 జనన, మరణ ప్రక్రియ (Birth and death process) :

పై ప్రకరణాలలో పరిశీలించిన శుద్ధ జనన ప్రక్రియ నమూనాలో కేవలం జననాల మూలంగా సమూహపరిమాణం పెరిగిందనీ, శుద్ధ మరణ ప్రక్రియ నమూనాలో కేవలం మరణాల మూలంగా సమూహ పరిమాణం తగ్గిందనీ అనుకొన్నాము. ఈ రెండు నమూనాలను

సమ్మిశ్రమంచేస్తే, సమూహంలో పెరుగు, తగ్గుదలలవల్ల ఉత్పన్నమైన మార్పులను గురించి ఒకేసారి పరిశీలించవచ్చు. ఉదాహరణకు, సేవకోసం స్టోరులో ప్రవేశించిన వారు కొందరయితే, సేవలనందుకొన్న మరికొందరు స్టోరునుండి నిష్క్రమించెదరు. ఇదేవిధంగా, టెలిఫోన్ ఎక్స్చేంజి వద్ద నమోదయిన పిలుపులు, అంటువ్యాధి వ్యాప్తివంటి మిశ్రమ నమూనాను జనన, మరణ ప్రక్రియ (birth and death process) అంటారు. ముందు అతి 'సార్వత్రిక జనన, మరణ ప్రక్రియ' (generalized birth and death process) గురించి చర్చిస్తాము.

కింది స్వీకృతాలకు అనుగుణంగా రెండు రకాల సంఘటనలు సంభవిస్తాయని ఊహిద్దాము. 'జననము' అనే మొదటిరకం సంఘటన ద్వారా సమూహంలో ఒక యూనిటు మేరకు పెరుగుదలనీ; 'మరణము' అనే రెండో రకం సంఘటన ద్వారా సమూహంలో ఒక యూనిటుమేరకు తగ్గుదల ఏర్పడిందని అనుకొందాము.

(i) t క్షణం వద్ద సమూహ పరిమాణము n $(n \geq 0)$ అయితే, $(t, t+\triangle t^{-}$ అనే అత్యల్ప కాలాంతరంలో ఒక్క జననం సంభవించే సంభావ్యత $\lambda_n \triangle t + O(\triangle t)$ కునూ; కనీసం ఒక్క జననం కూడా సంభవించని సంభావ్యత $1 - \lambda_n \triangle t + O(\triangle t)$ కునూ, అంటే ఒకటికంటె పెచ్చు జననాలు సంభవించే సంభావ్యత $O(\triangle t)$ కునూ, సమానము. $(t, t+\triangle t^{-}$ లో సంభవించే జననాలు, వీటి ముందు జననానికి మధ్యపట్టే వ్యవధిపై ఆధార పడదు.

(ii) t క్షణంవద్ద సమూహ పరిమాణము n $(>0)$ అయితే, $(t, t+\triangle t^{-}$ అనే అత్యల్ప కాలాంతరంలో ఒక మరణం సంభవించే సంభావ్యత $\mu_n \triangle t + O(\triangle t)$ కునూ, కనీసం ఒక్క మరణంకూడా సంభవించని సంభావ్యత $1 - \mu_n \triangle t + O(\triangle t)$ కునూ; అంటే, ఒకటికంటే ఎక్కువ మరణాలు సంభవించే సంభావ్యత $O(\triangle t)$ కునూ సమానము. $(t, t+\triangle t^{-}$ లో సంభవించే మరణాలు, వీటి ముందు సంభవించిన మరణానికి మధ్య పట్టే వ్యవధిపై ఆధారపడవు.

(iii) t క్షణంవద్ద సమూహ పరిమాణం 0 అయితే, మరోక్షణంలో అంటే, $(t, t+\triangle t^{-}$ అనే అత్యల్పాంతరంలో మరణం సంబవించు సంభావ్యత $O(\triangle t)$.

(iv) జనన, మరణాలు ఏ సంబంధం లేకుండా సంభవిస్తాయి. t క్షణంవద్ద సమూహ పరిమాణము $X_t$ తో సూచిస్తూ,

$$p_{in}(s, t) = P(X_t = n \quad X_s = i) \quad (t > s) \quad \ldots 3.6.1$$

పై స్వీకృతాల దృష్ట్యా $\{X_t, t \geq 0\}$ స్థావర, స్వతంత్ర పెరుగుదలలుగల మార్కోవ్

ప్రక్రియ అవుతుంది. (3.6.1) ప్రకారం,

$$p_n^{(t)} = P\left(X_t = n\right) = \sum_j p_j^{(0)}\, p_{jn}^{(t)} = p_{in}^{(t)} \qquad \ldots 3.6.2$$

(ఇక్కడ $j = i,\ j \neq i$ ప్రకారం $p_j^{(0)} = 1, 0$)

పై స్వీకృతాల పర్యవసానంగా సజాతీయ సంక్రమ సంభావ్యతలను కింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$$p_{nn+1}^{(\Delta t)} = p_{nn+1}\left(t, t+\Delta t\right) = \left[1 - \mu_n \Delta t + O(\Delta t)\right] \left[\lambda_n \Delta t + O(\Delta t)\right]$$

$$p_{nn-1}^{(\Delta t)} = p_{nn-1}\left(t, t+\Delta t\right) = \left[1 - \lambda_n \Delta t + O(\Delta t)\right] \left[\mu_n \Delta t + O(\Delta t)\right]$$

$$p_{nn}^{(\Delta t)} = p_{nn}\left(t, t+\Delta t\right) = \left[1 - \lambda_n \Delta t + O(\Delta t)\right] \left[1 - \mu_n \Delta t + O(\Delta t)\right]$$

వీటి దృష్ట్యా,

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j \neq n-1,\, n,\, n+1} p_{nj}\left(t, t+\Delta t\right) &= O(\Delta t) \\ p_{nn+1}^{(\Delta t)} &= \lambda_n \Delta t + O(\Delta t) \\ p_{nn-1}^{(\Delta t)} &= \mu_n \Delta t + O(\Delta t) \\ p_{nn}^{(\Delta t)} &= 1 - (\lambda_n + \mu_n)\Delta t + O(\Delta t) \end{aligned}\right\} \ldots 3.6.3$$

పై స్వీకృతాలలో ఉపయోగించిన $\lambda_n$, $\mu_n$ లు వరస జనన, మరణ రేటులు. ఈ స్వీకృతాలను అనుసరించే సంఘటనలకు సంబంధించిన ప్రక్రియను 'సార్వత్రిక జనన, మరణ ప్రక్రియ' అంటారు. పై నమూనాలో $(\lambda_n = \lambda\ (n \geq 0)\ \mu_n = \mu\ (n > 0)$ లను ప్రతిక్షేపిస్తే ఉత్పన్నమయ్యే ప్రక్రియ జనన, మరణ ప్రక్రియలకు అత్యంత సామాన్య ఉదాహరణ అవుతుంది. అందువల్ల ఈ సందర్భంలో పై నమూనాను 'సామాన్య జనన, మరణ ప్రక్రియ (simple birth and death process) అంటారు. ప్రస్తుతం సార్వత్రిక జనన మరణ ప్రక్రియ నమూనాను విశ్లేషిద్దాము.

$X_t$ యొక్క విభాజనాన్ని కనుక్కోడానికి చాప్‌మెన్ - కొల్మొగ్రోవ్ సమీకరణము

(3.2.1) ను ఉపయోగిస్తాము. పై స్వీకృతాలకు అనువుగా (0, t), (t, t + $\triangle$t) అనే వివర్జిత కాలాంతరాలలో సంభవించే సంఘటనలకు సంబంధించిన సంభావ్యతల (3.6.3) ను (3.2.1) లో ప్రతిక్షేపిస్తే,

$$p_n^{(t+\triangle t)} = p_n^{(t)} p_{nn}^{(\triangle t)} + p_{n-1}^{(t)} p_{n-1\,n}^{(\triangle t)} + p_{n+1}^{(t)} p_{n+1\,n}^{(\triangle t)} + \sum_{j \neq n-1,\, n,\, n+1} p_n^{(t)} p_{nj}^{(\triangle t)} \quad \ldots 3.6.4$$

(3.6.3) ను (3.6.4) లో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\begin{aligned} p_n^{(t+\triangle t)} &= p_n^{(t)} \left[1 - (\lambda_n + \mu_n) \triangle t + O(\triangle t)\right] \\ &+ p_{n-1}^{(t)} \left[\lambda_{n-1} \triangle t + O(\triangle t)\right] \\ &+ p_{n+1}^{(t)} \left[\mu_{n+1} \triangle t + O(\triangle t)\right] + O(\triangle t) \end{aligned} \quad \ldots 3.6.5$$

$\triangle t \longrightarrow 0$ అయితే, అవధిలో

$$\underset{\triangle t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{p_n^{(t+\triangle t)} - p_n^{(t)}}{\triangle t} = p_n'^{(t)}, \quad \underset{\triangle t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{O(\triangle t)}{\triangle t} = 0$$

కాబట్టి అవధిలో (3.6.3)

$$p_0'^{(t)} = -\lambda_0 p_0^{(t)} + \mu_1 p_1^{(t)} \quad \ldots 3.6.6$$

$$p_n'^{(t)} = -(\lambda_n + \mu_n) p_n^{(t)} + \lambda_{n-1} p_{n-1}^{(t)} + \mu_{n+1} p_{n+1}^{(t)} \quad (n > 0) \quad \ldots 3.6.7$$

అవుతుంది. ఈ అవకలన సమీకరణాలకు సంబంధించిన తొలి నియమాలు

$$p_n^{(0)} = \begin{cases} 1, & n = i \\ 0, & n \neq i \end{cases}$$

$\lambda_n$, $\mu_n$ లు n లో ఏదైనా ప్రమేయాలయినప్పుడు (3.6.7) ను పరిష్కరించడం అత్యంత క్లిష్ట సమస్య అవుతుంది. కాని నమూనా తీవ్రతలు $\lambda_n$, $\mu_n$; n లో ఏకఘాతీయాలయితే, అంటే $\lambda_n = n\lambda$, $\mu_n = n\mu$ అయి తొలిలో సమూహ పరిమాణము i = 1 అయితే,

$$p_0^{(t)} = \mu \frac{1 - e^{-(\lambda-\mu)t}}{\lambda - \mu e^{-(\lambda-\mu)t}} = a_t \quad \ldots 3.6.8$$

$$p_n^{(t)} = \left(1 - a_t\right)\left(1 - b_t\right) b_t^{n-1} \qquad \ldots 3.6.9$$

ఇక్కడ $b_t = \dfrac{\lambda}{\mu} a_t$. (3.6.9) నుంచి $\left\{X_t, t \geq 0\right\}$ యొక్క విభాజనము సవరిత జ్యామితీయ విభాజనము (modified geometric distribution) అని గ్రహించవలె.

పెరుగుదల రేటు $\lambda_n$, n మీద ఏకఘాతీయంగా ఆధారపడి ఉంటే, సమూహం ఎప్పటికైన నాశనమయ్యే అవకాశాన్ని $p_0^{(t)}$ ద్వారా పరిశీలించవచ్చు. $t \longrightarrow \infty$ అయినప్పుడు, అవధిలో $p_0^{(t)}$ తీసికొనే విలువను బట్టి ఇది ఆధారపడి ఉంటుంది. ఇక్కడ

$\underset{t \longrightarrow \infty}{Lt} \; p_0^{(t)}$ = సమూహము అంతంలో నశించే సంభావ్యత

కాబట్టి, $\dfrac{\lambda}{\mu} = \rho$ గా వ్రాసి, (3.6.8) నుండి,

$$\underset{t \longrightarrow \infty}{Lt} \; a_t = \frac{\mu}{\lambda}, \qquad (\rho > 1) \qquad \ldots 3.6.10$$

$$\underset{t \longrightarrow \infty}{Lt} \; a_t = \underset{t \longrightarrow \infty}{Lt} \; \frac{e^{(\mu-\lambda)t}\left(\mu e^{-(\mu-\lambda)t} - \mu\right)}{e^{(\mu-\lambda)t}\left(\lambda e^{-(\mu-\lambda)t} - \mu\right)}$$

$$= 1, \qquad (\rho \leq 1) \qquad \ldots 3.6.11$$

అంటే,

$$\underset{t \longrightarrow \infty}{Lt} \; p_0^{(t)} = \begin{cases} 1, & \rho \leq 1 \\ \rho^{-1}, & \rho > 1 \end{cases} \qquad \ldots 3.6.12$$

దీనినిబట్టి మరణరేటు, $\mu$, జననరేటు $\lambda$ కంటె ఎక్కువ ఉంటే; సమూహము చివరి నాశనమవడం తథ్యమన్నమాట.

ఇప్పుడు సాధారణ జనన, మరణ ప్రక్రియ యొక్క అవధి సంభావ్యతలు $\underset{t \longrightarrow \infty}{Lt} \; P_n^{(t)} = \underset{t \longrightarrow \infty}{Lt} \; P_{in}^{(t)} = \pi_n$ ను కనుక్కొందాము (3.6.6), (3.6.7) లలో

$$\underset{t \longrightarrow \infty}{Lt} \; p_n^{(t)} = \pi_n, \quad \underset{t \longrightarrow \infty}{Lt} \; p_n'^{(t)} = 0 \qquad (n \geq 0)$$

లను ప్రతిక్షేపిస్తే,

$$0 = -\lambda_0 \pi_0 + \mu_1 \pi_1 \qquad \ldots 3.6.13$$

$$0 = -(\lambda_n + \mu_n) \pi_n + \lambda_{n-1} \pi_{n-1} + \mu_{n+1} \pi_{n+1} \quad (n > 0) \qquad \ldots 3.6.14$$

(3.6.13) నుండి,

$$\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \pi_0 \qquad \ldots 3.6.15$$

$n = 1$ అయినప్పుడు (3.6.15) నుంచి.

$$\mu_2 \pi_2 = (\lambda_1 + \mu_1) \pi_1 - \lambda_0 \pi_0$$

$$= \lambda_1 \pi_1 \qquad (\because (3.6.15))$$

$$\therefore \quad \pi_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} \pi_0 \qquad \ldots 3.6.16$$

ఈ విధంగా గణితానుగమనం దృష్ట్యా వాదిస్తే,

$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \cdot \pi_0 \qquad \ldots 3.6.17$$

(3.6.15) — (3.6.17) లను $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ లో ప్రతిక్షేపించి $\pi_0$ ని కనుక్కొంటే,

$$\pi_0 = \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \right]^{-1} \qquad \ldots 3.6.18$$

$(X_t, t \geq 0)$ యొక్క అవధి విభాజనము $\{\pi_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ ను (3.6.17), (3.6.18) ల ద్వారా నిర్ణయిస్తాము. ఇక్కడ మనం గమనించవలసింది ఏమంటే, $(\pi_n)$ అశూన్య సాధనం కావలెనంటే, (3.6.18) నుండి

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} < \infty \qquad \ldots 3.6.19$$

(3.6.19) నియమాన్ని సామాన్య జనన, మరణ ప్రక్రియకోసం సరిచూపుదాము. (3.6.19)లో $\lambda_n = \lambda$ $(n \geq 0)$, $\mu_n = \mu$ $(n > 0)$ ప్రతిక్షేపిస్తే

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n < \infty, \quad \frac{\lambda}{\mu} < 1.$$

అంటే, $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$ అనుకొంటే $\{\pi_n\}$ ఒక అశూన్య సాధన మవుతుంది.

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$ అనుకొని, (3.6.18), (3.6.17) ల నుంచి వరసగా

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \qquad \ldots 3.6.20$$

$$\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right), \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad \ldots 3.6.21$$

సామాన్య జనన, మరణ ప్రక్రియ యొక్క అవధి విభాజనము $p = \left(1 - \dfrac{\lambda}{\mu}\right)$ పరామితిగాగల జ్యామితీయ విభాజనమని (3.6.21) ద్వారా గమనించండి.

$\lambda_n = n\lambda$, $\mu_n = n\mu$ $(n \geq 1)$ అయినప్పుడు జనన, మరణ ప్రక్రియ లోని పరామితులు n లో ఏకఘాతీయం అని ఊహిస్తాము. ఈ సందర్భంలో నమూహ పరిమాణము $X_t$ యొక్క అవధి విభాజనాన్ని నిర్ణయించడాన్ని పరిశీలిద్దాము.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \text{ అయితే, } \pi_0 = 1, \; \pi_n = 0 \qquad (n > 0)$$

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} > 1$ అయితే, (3.6.8) నుంచి

$$\pi_0 = \operatorname*{Lt}_{t \to \infty} a_t = \rho^{-1}, \quad \operatorname*{Lt}_{t \to \infty} b_t = \operatorname*{Lt}_{t \to 0} \rho\, a_t = 1$$

(3.6.9) నుంచి,

$$\therefore \quad \pi_n = \underset{t \to \infty}{Lt}\; p_n^{(t)} = \underset{t \to \infty}{Lt}\; (1-a_t)(1-b_t)\, b_t^{n-1} = 0$$

$$(n > 0)$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore \quad \pi_0 &= \begin{cases} 1, & \rho \leq 1 \\ \rho^{-1}, & \rho > 1 \end{cases} \\ \pi_n &= 0 \qquad (n > 0) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots 3.6.22$$

(3.6.22) బట్టి $\rho \leq 1$ అయినప్పుడు సమూహం పూర్తిగా నాశనమవుతుందనీ, $\rho > 1$ అయనప్పుడు సమూహ పరిమాణము హద్దు లేకుండా పెరగడం సంభవమవుతుందని గమనించవలె.

*3.6.1 నిరీక్షణా కాల విభాజనము :* సార్వత్రిక జనన, మరణ ప్రక్రియకు సంబంధించి $i \to i \pm 1$ లకు సంక్రమించకముందు i వ స్థితిలోనే ప్రక్రియ నిరీక్షించే కాలము $T_i$ తో సూచిస్తే, $T_i$ అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి అవుతుంది. పై స్వీకృతాలకు అనుగుణంగా $\lambda_n$, $\mu_n$ లను జనన, మరణ రేట్లను సూచించే పరామితులని అనుకొందాము. ప్రతి $n \geq 0$ కు,

$$F_n(t) = P(T_n > t) \qquad \ldots 3.6.23$$

గా సూచించి అత్యల్పవిలువ $\triangle t$ కు సంబంధించి, $[T_n > t + \triangle t]$ అనే ఘటనను పరిశీలిస్తే,

$$[T_n > t + \triangle t]$$

$$= [T_n > t] \cap [(t, t + \triangle t] \text{ లో కూడా సంఘటన సంభవించదు}]$$

సాధారణ జనన, మరణ ప్రక్రియలోని స్వీకృతాలదృష్ట్యా

$$F_n(t + \triangle t) = F_n(t)\,[1 - (\lambda_n + \mu_n)\triangle t + O(\triangle t)]$$

లేదా
$$\frac{F_n(t+\triangle t) - F_n(t)}{\triangle t} = -(\lambda_n + \mu_n) F_n(t) + \frac{O(\triangle t)}{\triangle t}$$

$\triangle t \to 0$ అయితే, అవధిలో లభించే అవకలన సమీకరణము

$$F_n'(t) = -(\lambda_n + \mu_n) F_n(t) \qquad \ldots 3.6.24$$

$F_n(0) = P(T_n > 0) = 1$ అనే తొలి నియమాన్ని ఉపయోగించి, (3.6.24) యొక్క

సాధనము,

$$P\left(T_n > t\right) = F_n(t) = e^{-\left(\lambda_n + \mu_n\right) t}, \quad (t \geq 0) \quad \ldots 3.6.25$$

(3.6.25) బట్టి $T_n$, ఋణఘాత విభాజనాన్ని అనుసరించే యాదృచ్ఛిక చలరాశి, $E\left(T_n\right) = \left(\lambda_n + \mu_n\right)^{-1}$, $n = 0$ అయినప్పుడు పై విధంగా $T_0$ కూడా $\lambda_0^{-1}$ అంకమధ్యమంగాగల ఋణఘాత విభాజనాన్ని అనుసరిస్తుందని చూపవచ్చు.

ఇంకా, t క్షణంవద్ద ప్రక్రియ n $(\geq 1)$ వ స్థితిలో ఉంటే, $(t, t + \Delta t)$ లో $n \longrightarrow n+1$ కు సంభావ్యత $\lambda_n \Delta t + O(\Delta t)$ కునూ, $n \longrightarrow n-1$ కు సంభావ్యత $\mu_n \Delta t + O(\Delta t)$ కునూ, ఏదో ఒక సంక్రమానికి సంభావ్యత $(\lambda_n + \mu_n) \Delta t + O(\Delta t)$ కు సమానమని స్వీకృతాల దృష్ట్యా గమనించాము. ఏదో ఒకమార్పు సంభవించినదనితెలిస్తే, అది $n \longrightarrow n+1$ అయ్యే సంభావ్యత $\lambda_n (\lambda_n + \mu_n)^{-1}$ కునూ, $n \longrightarrow n-1$ చెందే సంభావ్యత $\mu_n (\lambda_n + \mu_n)^{-1}$ కునూ సమానమని చూపవచ్చు. ఈ విధమైన ప్రక్రియాచలనం మొదటి అధ్యాయంలో చర్చించిన 'యాదృచ్ఛిక నడక'ను పోలింది. భేదమేమంటే, ఈ ప్రక్రియలోని మార్పులు నిర్ణీత సమయాలవద్ద కాకుండా యాదృచ్ఛిక క్షణాలవద్దనే సంభవిస్తాయి. దీనినిబట్టి స్థితిమార్పు సంభవించడాన్ని బెర్నోలీ ప్రయత్నంతో పోల్చవచ్చు. జనన, మరణ ప్రక్రియను సమూహ పరిమాణం శూన్యం కాకుండా ఉన్నంత కాలం ఋణఘాత విభాజనాన్ని అనుసరించే యాదృచ్ఛిక అంతరాల వ్యవధులలో జరిపే బెర్నోలీ ప్రయత్నాల అనుక్రమంగా తలంచవచ్చు. ఈ లక్షణం ఆధారంగా జనన, మరణ ప్రక్రియయొక్క పరామితుల అంచనాలను (estimates) కట్టడం, వాటిగురించిన పరికల్పనా పరీక్షలను (hypothesis testing) జరపడం సాధ్యమవుతుంది.

## 3.7 జనన, మరణ ప్రక్రియకు ఉదాహరణలు

జనన, మరణ ప్రక్రియకు సంబంధించిన పరామితులు $\lambda_n$, $\mu_n$ లో కొద్ది మార్పులు చేసి మనం ఎదుర్కొనే ఎన్నో సమస్యలకు ఈ ప్రక్రియను నమూనాగా వ్రాయవచ్చుననే విషయము కింది అనువర్తనాల ద్వారా తెలుస్తుంది.

*3.7.1 వలసతో ఏకఘాత వృద్ధి* (Linear growth with immigration) నమూనా : సాధారణ జనన, మరణ ప్రక్రియలో $\lambda_n = n\lambda + \theta$ $(\lambda > 0, n \geq 0, \theta > 0)$, $\mu_n = n\mu$ $(n \geq 1, \mu > 0)$ లను ప్రతిక్షేపిస్తే ఏర్పడే నమూనాను 'వలస' తో ఏకఘాత వృద్ధి నమూనా అంటారు. ఇటువంటి ప్రక్రియలు మనకు సామాన్యంగా జీవశాస్త్రంలో పునరోత్పత్తి, జనాభివృద్ధి పరిశీలనలలో ఎదురవుతాయి. వర్తమానకాలంలో సమూహ పరిమాణము n అయి, ఇందులోని ప్రతి యూనిట్ $\lambda$ రేటు ప్రకారం జననాన్ని ఇవ్వగలగడంవల్ల సమూహపు పెరుగుదల $\theta$ రేటు ప్రకారం వృద్ధి చెందడంతో మొత్తం పెరుగుదల $n\lambda + \theta$ అవుతుంది. మరణరేటు $\mu$ అనుకొంటే, సమూహ పరిమాణం $\mu_n = n\mu$

రేటు ప్రకారం తగ్గుతుంది. ఈ సందర్భంలో నమూనాకు అశూన్య అవధి విభాజనం $\{\pi_n\}$ ఉండవలెనంటే (3.6.19) నిజమని చూపవలె. $\lambda_n$, $\mu_n$ విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే,

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\theta(\theta+\lambda)\ldots\ldots(\theta+\overline{n-1}\,\lambda)}{n!\,\mu^n}$$

దీని అభిసరణం కోసం నిష్పత్తి పరీక్ష (ratio test) ద్వారా పరీక్షిస్తే

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}} \frac{\theta(\theta+\lambda)\ldots(\theta+n\lambda)}{(n+1)!\,\mu^{n+1}} \cdot \frac{n!\,\mu^n}{\theta(\theta+\lambda)\ldots(\theta+\overline{n-1}\,\lambda)}$$

$$= \underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}} \frac{\theta+n\lambda}{(n+1)\lambda} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho < 1$$

అయినప్పుడు ఏకఘాత వృద్ధి ప్రక్రియకు అశూన్య అవధి విభానము ఉంటుందని స్పష్టమవుతుంది.

*3.7.2.* **క్యూ (Queue) నమూనా :** ఏదో రకమైన సేవలనందడానికి కొను గోలుదార్లు ఒక నిర్ణీత ప్రదేశాన్ని ప్రవేశించి వరస క్రమంలో నిరీక్షించడం చూస్తూ ఉంటాము. ఈ వరసనే 'క్యూ' అంటాము. విచారణ కౌంటరు వద్ద విచారణ ఆఫీసరుతో సంప్రదింపు కోసం వరస క్రమంలో నిరీక్షించడం, మెకానిక్ షాపు వద్ద మోటారు బండ్లు మరమ్మత్తు అనే సేవ కోసం ఉండడం; బ్యాంకు కాష్ కౌంటరు దగ్గర వరస క్రమంలో డబ్బు పుచ్చుకోవడం లేదా ఇవ్వడం కోసం ఉండడం వంటివి క్యూలకు ఉదాహరణలవుతాయి. క్యూ సాధారణంగా కింది లక్షణాలతో ప్రవర్తించడం గమనిస్తాము.

(1) *ప్రవేశ విధానము :* క్యూను ఏయే వ్యవధులలో కష్టమర్లు ప్రవేశిస్తారో, వాటిని అంతర ప్రవేశ వ్యవధులు (inter-arrival times) అంటారు. $t_0, t_1, t_2 \ldots$ క్షణాల వద్ద వరసగా కష్టమర్లు క్యూని ప్రవేశిస్తుంటే, $T_i = t_i - t_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ లు అంతర ప్రవేశ వ్యవధులు అవుతాయి. $T_i$ లు ఒకే విభాజనాన్ని అనుసరించే స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులు అనుకొందాము. అంటే ప్రవేశించే విధానం కాలం దృష్ట్యా స్థావరమని దీని అర్థము. కాని ఆచరణలో ఇది పూర్తిగా సమంజసం కాదు. ఎందుకనగా సంటే, టెలిఫోన్ ఎక్స్చేంజ్ వద్ద వత్తిడి సమయాలలో ఎక్కువ పిలుపు నమోదు కావచ్చు; రోగులు కొన్ని సమయాలలోనే డాక్టర్ల దగ్గరకు ఎక్కువగా చేరవచ్చు.

(2) *సేవా పద్ధతి, విభాజనము :* ఒక్కొక్క కష్టమరుకు సేవ చేయడానికి సేవకునకు

పట్టే సేవాకాలాలు, వాటి విభాజనాలు.

(3) సేవకుల సంఖ్య : క్యూలో నిరీక్షిస్తున్న కష్టమర్లకు సేవ చేసే సేవకుల సంఖ్య, $s \ (s \geq 1)$

(4) క్యూ ప్రవర్తన : కష్టమర్లను సేవకు తీసికొనేటప్పుడు సేవకుడు అవలంభించే విధానము—ముందు వస్తే మొదట సేవ; తుది రాకకు మొదట సేవ; సేవకోసం యాదృచ్ఛిక ఎన్నిక; లేదా ప్రత్యేక వ్యక్తులకు ముందు సేవ.

(5) క్యూ పొడవు : క్యూ పరిమితిగలదిగానే ఉండవలెనా లేదా అపరిమితమైనదిగా ఉండవచ్చునా నన్న విషయము. క్యూని ప్రవేశించే వివిధ కష్టమర్ల ప్రవేశాల మధ్య గల అంతర ప్రవేశ వ్యవధులు (interarrival times), వీరు సేవలందుకోడానికి పట్టే సేవా కాలాలు (service times) కొన్ని సంభావ్యత చట్టాలను అనుగుణ్యంగా ఉండే యాదృచ్ఛిక చలరాశులని ఊహించవచ్చు.

పై లక్షణాలుగల క్యూని సంకేత రూపంలో కింది క్రమంలో వర్ణించడం పరిపాటి. అంతర ప్రవేశ విభాజనము సేవాకాల విభాజనము సేవకులసంఖ్య.
ఆ చరణలో ఉన్న కొన్ని ప్రమాణ సంకేతాలు:

G : సేవాకాలాలుగాని, అంతర ప్రవేశ వ్యవధులుగాని అనుసరించే ఏదైనా యాదృచ్ఛిక విభాజనము

M: ప్రవేశాలు (arrivals) అనుసరించే పాయిజాన్ లేదా అంతర ప్రవేశ వ్యవధులు అనుసరించే ఘాత విభాజనము; లేదా సేవాకాలాలు అనుసరించే ఘాత విభాజనము.

$E_k$ : అంతర ప్రవేశాలు లేదా సేవాకాలాలు అనుసరించే k-ఆర్డరుగల ఎర్లాంగు (Erlang) విభాజనము; దీని సాంద్రతా ప్రమేయము

$$\frac{\lambda}{k!} (\lambda t)^{k-1} e^{-\lambda t}, \qquad \lambda > 0, \ t > 0.$$

D : అంతర ప్రవేశాలు లేదా సేవాకాలాలు స్థిరాలు.

ఉదాహరణకు, ప్రవేశకాలాలు పాయిజాన్ ప్రక్రియ రూపంలో, సేవాకాలాలు ఘాత విభాజనాన్ని అనుసరిస్తూ, s సేవకులుగల 'క్యూ'ని M M s తో సంకేత పరుస్తాము. ఈ సంకేతాలలో M M 1, M D 1, M G 1 మొదలైన 'క్యూ'లను వర్ణించండి.

t క్షణానికి క్యూలో ఉన్న కష్టమర్ల సంఖ్య, అంటే క్యూ పొడవును $X_t$ తో సూచిస్తే, $\{X_t, \ t \geq 0\}$ అనేది అవిచ్ఛిన్న పరామితి t తో, విచ్ఛిన్న స్థితి అవరణగల

ప్రక్రియ. దీనినే 'క్యూ ప్రక్రియ' (Queueing process) అంటారు. కింద పేర్కొన్న స్వీకృతాలను పాటించే చాలా 'క్యూ'లకు 3.6 లో చర్చించిన సార్వత్రిక జనన, మరణ ప్రక్రియను నమూనాగా వాడి క్యూలను వర్ణించవచ్చు.

i. ప్రవేశాలు : $t$ క్షణానికి క్యూలో ఉన్న కష్టమర్ల సంఖ్య $n$ అయితే, మరో క్షణంలో, అంటే $(t, t + \Delta t)$ అనే అత్యల్పాంతరంలో కష్టమరు క్యూని ప్రవేశించే సంభావ్యత $\lambda_n \Delta t + O(\Delta t)$ కునూ, ఎవ్వరు 'క్యూ'ని ప్రవేశించని సంభావ్యత $1 - \lambda_n \Delta t + O(\Delta t)$ కునూ, ఒకరికంటె ఎక్కువ కష్టమర్లు క్యూని ప్రవేశించే సంభావ్యత $O(\Delta t)$ కు సమానము. $(t, t + \Delta t)$ లో కష్టమర్ల ప్రవేశాలు, వీటి ముందు ప్రవేశానికి మధ్య పట్టే వ్యవధిపై ఆధారపడవని అనుకొందాము.

ii. సేవలు: $t$ క్షణానికి క్యూలో ఉన్న కష్టమర్ల సంఖ్య $n$ అయితే, $(t, t + \Delta t)$ లో ఒకరిసేవ పూర్తి అయ్యే సంభావ్యత $\mu_n \Delta t + O(\Delta t)$ కునూ; ఒకరికి కూడా సేవ పూర్తికాని సంభావ్యత $1 - \mu_n \Delta t + O(\Delta t)$ కునూ, ఒకరి కంటే ఎక్కువ కష్టమర్ల సేవ పూర్తి అయ్యే సంభావ్యత $O(\Delta t)$ కు సమానము. $(t, t + \Delta t)$ లో సేవలు పూర్తికావడం, ఈ సేవల ఆరంభకాలంపై ఆధార పడదని అనుకొందాము.

iii. $\mu_0 = 0, \lambda_0 > 0$.

పై స్వీకృతాలను పాటించే 'క్యూ ప్రక్రియ' ను $\lambda_n, \mu_n$ పరామితులుగల సార్వత్రిక క్యూ ప్రక్రియ (General Queueing Process) అంటూ, ఇది సార్వత్రిక జనన, మరణ ప్రక్రియతో ఏకీభవించడాన్ని గమనిస్తాము. $t$ క్షణానికి గల క్యూ పొడవును $X_t$ తో సూచిస్తే, పై స్వీకృతాల దృష్ట్యా $\{X_t, t \geq 0\}$ స్థావర, స్వతంత్ర పెరుగుదలలు గల ప్రక్రియ అవుతుంది. కాబట్టి (3.6.2) లో వలె,

$$p_n^{(t)} = p_{in}^{(t)} = P(X_t = n \mid X_0 = i) \qquad \ldots 3.7.1$$

అని వ్రాద్దాము. (3.6.6), (3.6.7) సమీకరణాల నుంచి,

$$p_0'^{(t)} = -\lambda_0 p_0^{(t)} + \mu_1 p_1^{(t)} \qquad \ldots 3.7.2$$

$$p_n'^{(t)} = -(\lambda_n + \mu_n) p_n^{(t)} + \lambda_{n-1} p_n^{(t)} + \mu_{n+1} p_{n+1}^{(t)} \quad (n > 0) \qquad \ldots 3.7.3$$

వీటి సాధన పరిష్కారం కోసం ఉపయోగించే తొలి నియమాలు

$$p_n^{(0)} = \begin{cases} 1, & n = i \\ 0, & n \neq i \end{cases} \qquad \ldots 3.7.4$$

(3 6.19) ఆధారంగా $t \longrightarrow \infty$ అయినప్పుడు $\{X_t\}$ యొక్క అశూన్య అవధి విభాజనము $\{\pi_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ ఉండడానికి

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} < \infty \qquad \ldots 3.7.5$$

నిజం కావాలని తీర్మానిస్తాము. $\underset{t \to \infty}{Lt}\ p_n^{(t)} = \pi_n$ కాబట్టి $\underset{t \to \infty}{Lt}\ p_n'^{(t)} = 0$ ఉపయోగించి, (3 7.2), (3.7.3) ల నుంచి,

$$\lambda_0 \pi_0 = \mu_1 \pi_1 \qquad \ldots 3.7.6$$

$$(\lambda_n + \mu_n) \pi_n = \lambda_{n-1} \pi_{n-1} + \mu_{n+1} \pi_{n+1} \qquad \ldots 3.7.7$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1 \qquad \ldots 3.7.8$$

(3.6.17), (3.6.18) ల వలె (3.7.6) – (3.7.8) లను సాధిస్తే,

$$\pi_0 = \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \right]^{-1} \qquad \ldots 3.7.9$$

$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \pi_0 \qquad \ldots 3\,7.10$$

పై సార్వత్రిక క్యూ ప్రక్రియలో n మీద పరామితులు $\lambda_n$, $\mu_n$ లకు గల విభిన్న ఆధార సంబంధాలను ఊహించుకొని వివిధ క్యూలను ప్రస్తుతం చర్చిద్దాము.

క్యూ M M 1: కష్టమర్లు $\lambda$ పరామితితో పాయిజాన్ ప్రక్రియ నమూనాలో ప్రవేశించే ఏర్పాటును పరిశీలిద్దాము. సేవకునికి పట్టే సేవాకాలాలు $\mu^{-1}$ అంకమధ్యమంగాగల ఘాత విభాజనాన్ని అనుసరించే స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులు అనుకొందాము.

క్షణానికి క్యూ పొడవు $X_t$ అయితే, $\{X_t, t \geq 0\}$ అనేది ప్రతి n కు $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \lambda$ పరామితులుగాగల సార్వత్రిక క్యూ ప్రక్రియ అవుతుంది $p_n^{(t)} = P(X_t = n)$ అయితే $p_n^{(t)}$ ని సాధించడానికి (3.7.2), (3.7.3) ల నుంచి

$$\left.\begin{aligned} p_0'^{(t)} &= -\lambda \rho_0^{(t)} + \mu p_1^{(t)} \\ p_n'^{(t)} &= -(\lambda + \mu) p_n^{(t)} + \lambda p_{n-1}^{(t)} + \mu p_{n+1}^{(t)} \quad (n > 0) \end{aligned}\right\} \quad \ldots 3.7.1$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\text{సగటు సేవాకాలము}}{\text{సగటు అంతర ప్రవేశకాలము}}$$ అయితే $\rho$ ని క్యూ యొక్క ట్రాఫిక్ తీవ్రత (traffic intensity) అంటారు. (3 7.5) నుండి,

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n < \infty \quad \ldots 3.7.12$$

కావాలంటే $\rho < 1$. అంటే, $\rho < 1$ అయితే $\{X_t, t \geq 0\}$ యొక్క అవధి విభాజనము $\{\pi_n\}$ ఉంటుంది. ఈ సందర్భంలో (3.7.9), (3 7.10) నుంచి

$$\left.\begin{aligned} \pi_0 &= (1 + \rho + \rho^2 + \ldots)^{-1} = 1 - \rho \\ \pi_n &= (1 - \rho)\rho^n \qquad (n \geq 0) \end{aligned}\right\} \quad \ldots 3.7.13$$

$\{\pi_n\}$ ని జ్యామితీయ విభాజనమని గమనించండి. $\operatorname{Lt}_{t \to \infty} X_t = X$ అని వ్రాస్తే,

$E(X) = \rho(1-\rho)^{-1}$, $Var.(X) = \rho(1-\rho^2)^{-1}$ అవుతాయి.

t క్షణం వద్ద క్యూలో ప్రవేశించిన కష్టమరు సేవా వ్యవస్థలోకి చేరక ముందు క్యూలో నిరీక్షించే కాలము $W_t$ తో సూచిస్తే, $V_t$ క్యూలో అతనికి ముందున్న వాళ్ళ సేవా కాలాల మొత్తానికి సమానమవుతుంది. $\{W_t, t \geq 0\}$ కూడా యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ. దీనిని నిరీక్షణా కాల ప్రక్రియ (waiting time process) అంటారు. M M 1 క్యూకు సంబంధించి $W_t$ యొక్క అవధి విభాజనాన్ని ఇప్పుడు పరిశీలిద్దాము. సేవా కాలాలు $\mu^{-1}$ అంకమధ్యమం గల ఋణఘాత విభాజనాన్ని అనుసరిస్తాయి. కాబట్టి t క్షణానికి క్యూలో n మంది ఉంటే,

$W_t$ = ఒకే ఋణఘాత విభాజనాన్ని అనుసరించే n స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశుల సంకలనము.

$\therefore$ $W_t$ యొక్క విభాజనం కింది సాంద్రతా ప్రమేయంగల గామా విభాజనమని తెలుసు.

$$f_{W_t}(w) = \frac{\mu^n}{n!} w^{n-1} e^{-\mu w}, \quad w > 0$$

$\underset{t \to \infty}{Lt} W_t = w$, $F_W(x) = P(W \le x)$ గా సూచిస్తే,

$$F_W(0) = P(X = 0) = \pi_0 = (1 - \rho) \qquad (\because 3.7.13)$$

$$f_W(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} P(x < W \le x + dx \mid X = n)\, P(X = n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} x^{n-1} e^{-\mu x} dx \,.\, \pi_n$$

$$= \lambda (1 - \rho) e^{-\mu x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx$$

$$= \lambda (1 - \rho) e^{-(\mu - \lambda) x} dx$$

లేదా $$f_W(x) = \lambda (1 - \rho) e^{-\mu (1 - \rho) x} \quad (x > 0) \qquad \ldots 3.7.14$$

$$\therefore \quad E(W) = \rho \{\mu (1 - \rho)\}^{-1}, \text{ Var}(W)$$

$$= \rho (2 - \rho) \{\mu^2 (1 - \rho)^2\}^{-1} \qquad \ldots 3.7.15$$

ఆచరణలో నిరీక్షణాకాల విభాజనము ఎక్కువ ఉపయోగపడుతుంది కాబట్టి (3.7.14) ద్వారా W యొక్క విభాజన ప్రమేయము $F_W(x)$ ను కనుక్కొందాము. నిర్వచనం ప్రకారం,

$$F_W(x) = P(W \le x)$$

$$= P(W = 0) + P(0 < W \le x)$$

$$= (1 - \rho) + \int_0^x \lambda (1 - \rho) e^{-\mu (1 - \rho) y} dy$$

$$= (1-\rho) + \frac{\lambda(1-\rho)}{\mu-\lambda} \int_0^x (\mu-\lambda)\, e^{-(\mu-\lambda)y}\, dy$$

$$= (1-\rho) + \rho\left[1 - e^{-(\mu-\lambda)x}\right]$$

$$= 1 - \rho\, e^{-\mu(1-\rho)x} \qquad \ldots 3.7.16$$

వ్యవస్థలో కష్టమరుకు అయిన మొత్తం ఆలస్యాన్ని పరిశీలించ తలస్తే, నిరీక్షణా కాలానికి ఆతనిసేవాకాలం కూడా కలపవలె. కష్టమరుకు సంభవించిన కాలవిలంబము $\leq x$ అయ్యే సంభావ్యతను $D(x)$ తో సూచిస్తే,

$$D(x) = P(W + V \leq x)$$

ఇక్కడ V, సేవాకాలాన్ని సూచిస్తూ, ఋణ విభాజనాన్ని అనుసరించే యాదృచ్ఛిక చలరాశి.

$$\therefore \quad D(x) = \int_0^\infty F_W(x-y)\, f_V(y)\, dy$$

$$= \int_0^\infty \left[1 - \rho\, e^{-\mu(1-\rho)(x-y)}\right] \mu\, e^{-\mu y}\, dy$$

$$= 1 - e^{-\mu(1-\rho)x} \qquad \ldots 3.7.17$$

ఇది ఋణఘాత విభాజనము. సగటున కష్టమరుకు సంభవించే కాల విలంబము

$$E(W + V) = \{\mu(1-\rho)\}^{-1} \qquad \ldots 3.7.18$$

క్యూ M/M/s : కష్టమర్లు $\lambda$ పరామితితో పాయిజాన్ ప్రక్రియ నమూనాలో క్యూను ప్రవేశించారనీ, సేవాకాలాలు $\mu^{-1}$ అంక మధ్యమంగాగల ఋణఘాత విభాజనాన్నే అనుసరించే స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులనీ, వ్యవస్థలో స్వతంత్రంగా ఏకకాలంలో సేవల నందచేసే సేవకుల సంఖ్య s $(\geq 1)$ అనీ అనుకొందాము. ఇక్కడ సేవకులందరు $\mu$ రేటు ప్రకారం సేవలనందిస్తారని గమనించవలె. కాని ఆచరణలో వివిధసేవకుల సేవారేట్లు భిన్నంగా

ఉండే వ్యవస్థలు ఉంటాయి. ఉదాహరణకు, కంప్యూటరు కేంద్రంలోని రెండు కంప్యూటర్లలో ఒకటి అతి త్వరలో ఫలితాలనందచేయవచ్చు, రెండోదానికి కొంత కాలవిలంబము జరగవచ్చు. పై సందర్భాలను ప్రత్యేక పరచడానికి సజాతీయ, వైజాతీ సేవకులు (homogeneous and heterogeneous servers) అని అంటారు.

t క్షణానికి క్యూ పొడవు $X_t$ అయితే, పై ఉపకల్పనల దృష్ట్యా $\{X_t, t \geq 0\}$ అనేది కింది పరామితులుగల సార్వత్రిక క్యూ ప్రక్రియ అవుతుంది :

ప్రతి n కు,
$$\left.\begin{aligned} \lambda_n = \mu,\ \mu_n &= n\mu, \quad n < s \\ &= s\mu, \quad n \geq s \end{aligned}\right\} \qquad \ldots 3.7.19$$

ఈ సందర్భంలో (3.7.2), (3.7.3) ల ఆధారంగా,

$$p_0'^{(t)} = -\lambda p_0^{(t)} + \mu p_1^{(t)}$$

$$p_n'^{(t)} = -(\lambda + n\mu)\, p_n^{(t)} + \lambda p_{n-1}^{(t)} + (n+1)\,\mu p_{n+1}^{(t)} \quad (n < s)$$

$$p_n'^{(t)} = -(\lambda + s\mu)\, p_n^{(t)} + \lambda p_{n-1}^{(t)} + s\,\mu p_{n+1}^{(t)} \qquad (n \geq s)$$

ఈ క్యూకు అవధి విభాజనాన్ని పరిశీలిద్దాము. $t \longrightarrow \infty$ అయినప్పుడు $\underset{t \longrightarrow \infty}{\mathrm{Lt}}\ X_t = X$ గా సూచిస్తూ, X యొక్క అశూన్య అవధి విభాజనము $\{\pi_n\}$ ఉండవలెనంటే, (3.7.5) నుంచి

$$1 + \sum_{n=1}^{s} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \lambda \frac{\lambda^{s+1}}{\mu \,.\, 2\mu \ldots s\mu\, s\mu} + \frac{\lambda^{s+2}}{s!\ \mu^{s+2}\,.\,s} + \ldots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{s} \frac{(s\rho)^n}{n!} + \sum_{n=s+1} \frac{(s\rho)^n}{s!\,s} \qquad \rho = \frac{\lambda}{s\mu},$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{s} \frac{(s\rho)^n}{n!} + \rho^{s+1} \frac{s^s}{s!} (1-\rho)^{-1} < \infty$$

అవడానికి వ్యవస్థయొక్క ట్రాఫిక్ తీవ్రత $\rho = \dfrac{\lambda}{s\mu} < 1$ ఉండవలె. ఈ సందర్భంలో X యొక్క అవధి విభాజనము

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{r=1}^{s} \frac{(s\rho)^r}{r!} + \frac{\rho^{s+1}\, s^s}{s!}(1-\rho)^{-1}\right]^{-1} \qquad \ldots 3.7.20$$

(3.7.10) నుంచి

$$\left.\begin{aligned} \pi_n &= \frac{(s\rho)^n}{n!}\pi_0 \qquad (n < s) \\ &= \frac{s^s \rho^n}{s!}\pi_0 \qquad (n \geq s) \end{aligned}\right\} \ldots 3.7.21$$

(3.7.21) నుంచి

$$\pi_n = \rho^{n-s}\pi_s \qquad (n \geq s) \qquad \ldots 3.7.22$$

(3.7 20) — (3.7 22) ల నుంచి అవధిలో క్యూ పొడవు యొక్క ఆశంసిత విలువ కనుక్కొంటే,

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_n$$

$$= \sum_{n=0}^{s} n\frac{\pi_0}{n!}(s\rho)^n + \sum_{n=s+1}^{\infty} n\frac{\pi_0}{s!}\frac{(s\rho)^n}{s^{n-s}}$$

$$= s\rho\pi_0 \sum_{0}^{s-1} \frac{1}{n!}(s\rho)^n + \frac{\pi_0}{s!}(\rho s)^s \sum_{1}^{\infty}(n+s)\rho^n$$

$$= s\rho\pi_0 \sum_{0}^{s-1} \frac{1}{n!}(s\rho)^n + \frac{\pi_0}{s!}(s\rho)^s\left[\frac{\rho}{(1-\rho)^2} + \frac{s\rho}{1-\rho}\right]$$

$$= s\rho + \frac{\rho\pi_s}{(1-\rho)^2} \qquad \ldots 3.7.23$$

t క్షణం వద్ద క్యూలో ప్రవేశించిన కష్టమరు సేవా వ్యవస్థలోకి చేరకముందు క్యూలో నిరీక్షించే కాలము $W_t$ అయితే, దీర్ఘకాలంలో $\underset{t \to \infty}{Lt} W_t = W$ తో సూచిస్తూ,

$F_W(x) = P(W \leq x)$ అయితే,

$$F_W(0) = P(X < s)$$

$$= \pi_0 \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^n}{n!} \qquad \ldots 3.7.24$$

$$d F_W(x) = P(x < W \leq x + dx)$$

$$= \sum_{n=s}^{\infty} P(x < W \leq x + dx \mid X = n)\, P(X = n)$$

$$= \sum_{n=s}^{\infty} e^{-s\mu x} \frac{(s\mu x)^{n-s}}{(n-s)!} s\mu\, dx \,.\, \pi_n$$

$$= \sum_{n=s}^{\infty} e^{-s\mu x} \frac{(s\mu x)^{n-s}}{(n-s)!} s\mu\, \rho^{n-s} \pi_s\, dx.$$

$$= s\mu\, \pi_s\, e^{-(s\mu-\lambda)x}\, dx$$

$$\therefore \quad f_\omega(x) = s\mu\, \pi_s\, e^{-(s\mu-\lambda)x} \qquad (x > 0) \qquad \ldots 3.7.25$$

(3.7.25) ద్వారా, $$E(W) = \frac{\pi_s}{s\mu(1-\rho)^2} \qquad \ldots 3.7.26$$

M M 1 క్యూలోని అవధి సంభావ్యతలను పరిశీలించినట్లయితే, $\pi_0 = (1-\rho) = P(X = 0)$, అంటే దీర్ఘకాలంలో సేవకుడు ఊరక ఉండే సంభావ్యత $1-\rho$ అనీ, ఊరక ఉండని (busy) సంభావ్యత $\rho$ కు సమానమని గమనించాము. ఇదేవిధంగా M M s వ్యవస్థలో కష్టమర్ల సంఖ్య $\geq s$ అయితే s సేవకులు కూడా ఊరక ఉండరు. కాని కష్టమర్ల సంఖ్య $k\ (< s)$ అయితే ఏ సేవకుడైన ఊరక ఉండని సంభావ్యత $\frac{k}{s}$ అవుతుంది. కాబట్టి దీర్ఘకాలంలో s సేవకులు కూడా ఊరకే ఉండని సంభావ్యత

$$\pi_0 \left[ \frac{1}{s} s\rho + \frac{2}{s} \frac{(s\rho)^2}{2!} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{s-1}{s} \frac{(s\rho)^{s-1}}{(s-1)!} + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{(s\rho)^n}{s!\,s^{n-s}} \right]$$

$$= \pi_0 \left[ \rho + s\rho^2 + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{(s\rho)^{s-1}}{(s-1)!} \rho + \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{(s\rho)^{n-1}}{s!} \frac{\rho}{s^{n-1-s}} \right]$$

$$= \rho\pi_0 \left[ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^n}{n!} + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{(s\rho)^n}{s!\,s^{n-s}} \right]$$

$$= \rho\pi_0 \cdot (\pi_0)^{-1} = \rho.$$

దీనినిబట్టి M M s లో కూడా సేవకుడు ఊరక ఉండని సంభావ్యత ఆ వ్యవస్థ ట్రాఫిక్ తీవ్రతకు సమానమన్నమాట.

**ఒకే ట్రాఫిక్ తీవ్రత $\rho$ గల M M 2, M M 1 క్యూల పోలిక :**

(3.7.20) – (3.7.22), (3.7.23) లను పరిశీలించి, అవధిలో $s = 2$ సేవకులు గల క్యూ M M 2 యొక్క సగటు పొడవును వ్రాస్తే,

$$E(X) = \frac{2\rho}{(1+\rho)(1-\rho)}$$

అదే $\rho$ గల క్యూ M M 1 కు సంబంధించి, అవధిలో దాని పొడవు $X_1$ గా సూచిస్తే, (3.7.13) నుంచి

$$E(X_1) = \rho(1-\rho)^{-1}$$

ఈ రెండు సగటులను పోల్చితే,

$$E(X) - E(X_1) = \frac{2\rho}{(1+\rho)(1-\rho)} - \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$= \frac{\rho}{1+\rho} > 0$$

దీనినిబట్టి, ఒకే ట్రాఫిక్ తీవ్రతతో రెండు క్యూలను నిర్వచిస్తే, దీర్ఘకాలంలో ఇరువురు సేవకులుగల క్యూ పొడవు కంటె ఒక సేవకుడు గల క్యూ ఆశించిత పొడవు (expected length) తగ్గడాన్ని మనం గ్రహించాము. సేవా పరిమాణం కంటె సేవా నాణెత మేలుగా తలంచడానికి ఇదొక మంచి సందర్భమని స్పష్టమవుతుంది.

*సందిగ్ధావస్థతో* క్యూ M M 1 (Queue with balking): క్యూ పొడవును చూసిగాని మరి ఏ ఇతర కారణాలవల్ల క్యూని ప్రవేశిద్దామని వచ్చిన కస్టమరు సందిగ్ధంలో ఉన్నా ఉంటాము. సేవ సమయానికి లభించదేమోననిగానీ, పరిమిత నిరీక్షణా స్థలాభావంవల్ల గాని, మరే ఇతర కారణంవల్లగాని కస్టమరు సందిగ్ధావస్థను పొందవచ్చు. దీని దృష్ట్యా, క్యూని ప్రవేశించే రేటు క్యూ పొడవుపై ఆధారపడుతుంది. క్యూ పొడవు n అయినప్పుడు ప్రవేశించే రేటు $\lambda_n$ అనీ, సేవారేటు $\mu$ అనీ అనుకొందాము.

క్యూయొక్క అవధి విభాజనము $\{\pi_n\}$ అయితే (3.7.9), (3.7.10) లలో $\mu_n = \mu$ $(n \geq 1)$ ను, కింద నిర్దేశించిన $\lambda_n$ విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే ఏర్పడే వివిధ 'క్యూ'లను, వాటి అవధి విభాజనాలను చూద్దాము.

(a) $$\lambda_n = \frac{\lambda}{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \text{ అయితే,} \qquad \ldots 3.7.27$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \ldots}$$

$$= e^{-\lambda/\mu} = e^{-\rho} \quad \left(\rho = \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$\pi_n = e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad \ldots 3.7.28$$

ఇది $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ పరామితితో పాయిజాన్ విభాజనము. అందువల్ల ఈ సందర్భంలో క్యూ

M/M/1 ను పాయిజాన్ క్యూ (Poisson Queue) అంటారు.

$$\text{(b)} \quad \lambda_n = \frac{N-n}{N(n+1)} \qquad n < N$$
$$= 0 \qquad n \geq N \qquad \ldots 3.7.29$$

అయితే, (3.7.9), (3.7.10) ల నుంచి

$$\pi_0 = \left(1 + \frac{1}{N\mu}\right)^{-N}$$

$$\pi_n = \binom{N}{n}\left(\frac{1}{N\mu}\right)^n \left(1 + \frac{1}{N\mu}\right)^{-N}$$

$$= \binom{N}{n}\left(\frac{1}{1+N\mu}\right)^n \left(\frac{N\mu}{1+N\mu}\right)^{N-n} \qquad (n \geq 0) \quad \ldots 3.7.30$$

ఇది $p = (1 + N\mu)^{-1}$ సంభావ్యతతో ద్విపద విభాజనము కాబట్టి ఈ సందర్భంలో క్యూ M/M/1 ను ద్విపద క్యూ (Binomial Queue) అంటారు

$$\text{(c)} \quad \lambda_n = \frac{N+n}{N(n+1)} \qquad (n \geq 0) \quad \ldots 3.7.31$$

అయితే,

$$\pi_0 = \left(1 - \frac{1}{N\mu}\right)^{N}$$

$$\pi_n = \binom{-N}{n}\left(1 - \frac{1}{N\mu}\right)^N \left(-\frac{1}{N\mu}\right)^n \qquad (n \geq 0) \quad \ldots 3.7.32$$

ఇది ఋణద్విపద విభాజనం కాబట్టి ఈ సందర్భంలో క్యూ M/M/1ను ఋణద్విపద క్యూ (Negative Binomial Queue) అంటారు.

$$\text{(d)} \quad \lambda_n = \lambda, \qquad 0 \leq n \leq N$$
$$= 0 \qquad n > N \quad \text{అయితే,} \qquad \ldots 3.7.33$$

క్యూ పొడవు N అయిన తరవాత క్యూలో కష్టమర్ల ప్రవేశం లేదన్నమాట. (3.7.9), (3.7.10) ల నుండి,

$$\left.\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+2}} \\ \pi_n &= \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+2}} \cdot \rho^n \quad (n = 1, 2, \ldots, N) \end{aligned}\right\} \quad \ldots 3.7.34$$

దీనిని 'పరిమిత నిరీక్షణాస్థల క్యూ' (finite waiting room queue) అంటారు.

(e) $\lambda_n$ ను సేవారేటు $\mu$ పై ఆధారపడేటట్లు చేస్తే, కింది విధంగా నిర్వచిస్తే,

$$\lambda_n = \lambda e^{-\alpha n \mu}, \qquad n \geq 0,\ \alpha > 0 \qquad \ldots 3.7.35$$
$$\nu = e^{-\alpha/2\mu}$$

(3.7.9), (3.7.10) ల ద్వారా

$$\left.\begin{aligned} \pi_0 &= \left[\sum_{0}^{\infty} \rho^n \nu^{n(n-1)}\right]^{-1}, \\ \pi_n &= \rho^n \nu^{n(n-1)} \pi_0 \qquad (n > 0) \end{aligned}\right\} \quad \ldots 3.7.36$$

కష్టమర్ల సందిగ్ధావస్థ విషయం తెలిసినప్పుడు, అవధిలో క్యూ పొడవును గురించిన ముఖ్య లక్షణాలను కనుక్కొడానికి పై ఫలితాలు ఉపయోగపడతాయి. ఈ ఫలితాల ద్వారానే, అవధిలో క్యూ విభాజనం తెలిస్తే, సందిగ్ధంలో ఉన్న కష్టమర్ల ప్రవర్తనను కూడా తెలుసుకోవచ్చు. ఈ రెండు విధాలుగా క్యూ M M 1 కంటె కూడా పై ఫలితాలు ఆచరణలో నిజ పరిస్థితులకు దగ్గర నమూనాలవుతాయి.

## 3.8. పోల్యా ప్రక్రియ (Polya Process)

ఈ ప్రకరణంలో సూర్య కిరణ ప్రసారణ (Cosmic radiation) సిద్ధాంతంలోనూ, జీవిత భీమ సాంఖ్యక శాస్త్రంలోను విరివిగా అనువర్తింపబడే పోల్యా ప్రక్రియను గురించి క్లుప్తంగా చర్చిస్తాము.

$\{X_t, t \geq 0\}$ అనేది పాయిజాన్ ప్రక్రియ అయితే, ప్రతి $\lambda > 0$ కి, ప్రతి స్థిర $t$ $(t > 0)$ కు సంబంధించి $X_t$ యొక్క సంభావ్యతా విభాజనము

$$p_n(t) = P\left(X_t = n\ \lambda\right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \ldots 3.8.1$$

λ కూడా కింది గామా విభాజనాన్ని అనుసరించే అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి అనుకొందాము :

$$f(\lambda) = \frac{a^v}{\sqrt{v}} \cdot \lambda^{v-1} e^{-a\lambda}, \qquad \lambda > 0 \qquad \ldots 3.8.2$$

$$= 0 \qquad \lambda \leq 0$$

ఇప్పుడు స్థిర t కి సంబంధించి, 2 వ పరిమాణ (2 — dimensional) యాదృచ్ఛిక సదిశ $(X_t, \lambda)$ యొక్క విభాజనాన్ని పరిశీలిద్దాము. ఇందులో $X_t$ విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి, λ అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి కాబట్టి ప్రతి $h > 0$, $\lambda_1 > 0$ కి,

$$P\left(X_t = n,\ \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_1 + h\right)$$

$$= P\left(X_t = n\ \ \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_1 + h\right) . P\left(\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_1 + h\right)$$

∴ $X_t$, λ ల యొక్క సంయుక్త సంభావ్యతా ప్రమేయము

$$\underset{h \to 0}{Lt} \frac{1}{h} P\left(X_t = n.\ \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_1 + h\right)$$

$$= \frac{(\lambda_1 t)^n}{n!} e^{-\lambda_1 t} \frac{a^v}{\sqrt{v}} \lambda_1^{v-1} e^{-a\lambda}$$

అవుతుంది. $X_t$ యొక్క ఉపాంత సంభావ్యత ప్రమేయము

$$p_n(t) = P\left(X_t = n\right) = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} . \frac{a^v}{\sqrt{v}} . \lambda^{v-1} e^{-a\lambda}\, d\lambda$$

$$= \frac{a^v\, t^n}{\sqrt{v}\ n!} \int_0^\infty \lambda^{n+v-1} e^{-(a+t)\lambda}\, d\lambda$$

$$= \frac{a^v t^n}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{(n+v)}}{(a+t)^{n+v}}$$

$$= \frac{v(v+1) \dots (v+n-1)}{n!} \left(\frac{t}{t+a}\right)^n \left(\frac{a}{t+a}\right)^v$$

$n = 0$ అయితే,

$$p_0^{(t)} = P(X_t = 0) = \left(\frac{a}{t+a}\right)^v$$

$$\therefore \; p_n^{(t)} = \frac{v(v+1) \dots (v+n-1)}{n!} \left(\frac{t}{t+a}\right) p_0^{(t)},$$

$$n = 1, 2, \dots \qquad \dots 3.8.3$$

(3.8.3) లో $a = v = \frac{1}{d}$ ని ప్రతిక్షేపిస్తే,

$$\left.\begin{aligned} p_0^{(t)} &= (1+td)^{-1/d} \\ p_n^{(t)} &= \frac{(1+d)\dots[1+(n-1)d]}{n!} \left(\frac{t}{1+td}\right)^n p_0^{(t)} \\ & n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}\right\} \dots 3.8.4$$

దీని అంకమధ్యమము $= E(X_t) = \frac{1}{d} \left(\frac{td}{1+td} \div \frac{1}{1+td}\right) = t,$

విస్తృతి $= V(X_t) = t(1+td)$

(3.8.4) ని పరిశీలిస్తే, ఇందులోని $p_n^{(t)}$

$$p_0^{(0)} = 1, \quad p_n^{(0)} = 0 \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

అనే తొలి నియమాలను తృప్తిపరుస్తుందని గ్రహిస్తాము. t దృష్ట్యా (3.8.4) ని ఇరువైపుల అవకలనం చేస్తే, $p_n^{(t)}$ కి సంబంధించిన కింది అవకలన సమీకరణాలు వస్తాయి :

$$p_0'(t) = -\frac{1}{1+td}\, p_0(t) \qquad \ldots 3.8.5$$

$$p_n'(t) = -\frac{1+nd}{1+td}\, p_n(t) + \frac{1+(n-1)d}{1+td}\, p_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \ldots \qquad \ldots 3.8.6$$

(3.8.5), (3.8.6) సమీకరణాలు వరసగా (3.4.4), (3.4.5) లతో ఏకీభవిస్తాయనీ, ప్రక్రియ తీవ్రత

$$\lambda_n(t) = \frac{1+nd}{1+td}$$

t మీద ఆధారపడే ప్రమేయమని గ్రహిస్తాము. కాబట్టి $\{X_t, t \geq 0\}$ 3.4 లో చర్చించిన శుద్ధజనన ప్రక్రియ అవుతుంది. కాని భేద మేమంటే, దీని తీవ్రత కాలము t మీద ఆధారపడుతుంది. అందువల్ల ఈ ప్రక్రియ వైజాతీయ (non-homogeneous) ప్రక్రియ అవుతుంది.

ఈ ప్రక్రియలో t కి బదులు $\frac{e^{\tau d}-1}{d}$ అనే $\tau$ పరామితిలోని ప్రమేయాన్ని ప్రతిక్షేపించి, పై అవకలన సమీకరణాలను సూక్ష్మీకరిస్తే, అవి

$$\frac{dp_0(\tau)}{d\tau} = -p_0(\tau)$$

$$\frac{dp_n(\tau)}{d\tau} = -(1+nd)\, p_n(\tau) + [1+(n-1)d]\, p_{n-1}(\tau),$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

అవుతాయి. ఈ సందర్భంలో తీవ్రత $\lambda_n = 1 + nd$, $\tau$ పై ఆధారపడదు కాబట్టి $\{X_t, t \geq 0\}$ సజాతీయ ప్రక్రియ అవుతుంది.

నిర్వచనము 3.8.1 : $\{X_t, t \geq 0\}$ లోని $X_t$ లు (3.8.4) లో పేర్కొన్న సంభావ్యతా ప్రమేయాలను అనుసరించే యాదృచ్ఛిక చలరాశులు అయితే, అట్టి $\{X_t, t \geq 0\}$ ప్రక్రియను పోల్యాప్రక్రియ (Polya process) అంటారు.

## 3.9 పునఃప్రారంభ ప్రక్రియ (Renewal process)

ఏదైనా గణన ప్రక్రియకు సంబంధించి వరస సంఘటనల మధ్య పట్టే అంతర్సంభవ వ్యవధులు ఒకే ఋణఘాత విభాజనాన్ని అనుసరించే స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులు అయితే, అది పాయిజాన్ ప్రక్రియ అని 3.3 ప్రకరణంలో చర్చించినాము. అతంగ్సంభవ వ్యవధులు ఋణఘాత విభాజనం కాకుండా ఏదైనా ఒక యాదృచ్ఛిక విభాజనాన్ని అనుసరించే స్వతంత్ర ధన యాదృచ్ఛిక చలరాశులు అనుకొని, 3.3 లో చర్చించిన పాయిజాన్ ప్రక్రియను సార్వత్రికం చేస్తే ఏర్పడే గణన ప్రక్రియను ఈ ప్రకరణంలో పరిశీలిద్దాము. ఇటువంటి గణన ప్రక్రియను పునఃప్రారంభ ప్రక్రియ (Renewal process) అంటారు

కింది ఉదాహరణలలోని సంఘటనలను పరిశీలించండి :

(a) మాడిపోయినప్పుడు పునరుద్ధరించిన లైటుబల్బులు. ఒక నిర్ణీత స్థల ప్రదేశంలో t సమయానికి పునరుద్ధరించిన లైటు బల్బుల సంఖ్య, $N_t$ అనుకొందాము.

(b) యంత్రం చెడిపోగానే యంత్రంలో చెడిన విడిభాగాన్ని పునరుద్ధరించిన సార్లు $(0, t]$ లో యంత్రానికి సంభవించిన ఇటువంటి పునరుద్ధరణల సంఖ్య $N_t$ అనుకొందాము.

(c) ఒక పట్టణంలో సెంట్రల్ స్టేషన్ వద్ద నమోదు అయిన రోడ్డు ప్రమాదాలు $(0, t]$ లో సంభవించిన రోడ్డు ప్రమాదాల సంఖ్య $N_t$ అనుకొందాము.

పై ఉదాహరణలలో $(0, t]$ లో సంభవించిన సంఘటనల సంఖ్య $N_t$ అయితే, $N_t$ ఒక పురోగమన పూర్ణాంక మూల్య ప్రమేయం కాబట్టి $\{N_t, t \geq 0\}$ గణన ప్రక్రియ అవుతుంది. $i-1$, $i$ వ సంఘటనల మధ్య పట్టే వ్యవధి $T_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ అయితే $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ లు అంతర్సంభవ కాలాలను సూచించే ధన యాదృచ్ఛిక చలరాశులని తెలుసు.

నిర్వచనము 3.9.1 : అంతర సంభవ కాలాలు $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ ఏదైనా ఒకే విభాజనాన్ని అనుసరించే స్వతంత్ర ధన యాదృచ్ఛిక చలరాశులై, $(0, t]$ లో సంభవించే సంఘటనల సంఖ్య $N_t$ తో ఏర్పడే $\{N_t, t \geq 0\}$ అనే గణన ప్రక్రియను పునఃప్రారంభ ప్రక్రియ (Renewal process) అనీ, ఈ విధంగా సంభవించే సంఘటనలను పునః సంఘటనలు (renewals) అనీ $T_1, T_2, \ldots$ లను పునఃప్రారంభ కాలాలు (Renewal periods) అనీ అంటారు.

$t_1, t_2, t_3, \ldots \ldots$ $(0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots)$ క్షణాల వద్ద సంఘటనలు పునః ప్రారంభమవుతాయని అనుకొంటే, $T_i = t_i - t_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ అనే అంతర్సంభవ కాలాలు ధన యాదృచ్ఛిక చలరాశులు. ఈ

$T_1, T_2, \ldots$ లు పాయిజాన్ ప్రక్రియలో ఒకే ఋణఘాత విభాజనాన్ని అనుసరించే స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులని సిద్ధాంతం 3.3.3 ద్వారా గమనించాము. ఒక్కొక్కప్పుడు తొలి సంఘటన సంభవ కాలము $T_1$, మిగిలిన అంతర సంభవకాలాలు $T_2, T_3 \ldots$ అనుసరించే విభాజనాన్ని పాటించక పోవచ్చు. అందువల్ల $T_1, T_2, T_3 \ldots$ లు స్వతంత్ర ధన యాదృచ్ఛిక చలరాశులై $T_2, T_3 \ldots$ లు ఒకే విభాజనాన్ని అనుసరిస్తే, పునః సంఘటనల సంఖ్య $N_t$ అయితే, $\{N_t, t \geq 0\}$ ని కాల విలంబన పునఃప్రారంభ ప్రక్రియ (Delayed Renewal process) అంటారు.

ప్రతి $r = 2, 3, 4, \ldots\ldots$ కు, $T_r$ యొక విభాజన ప్రమేయము,

$$F(x) = P(T_r \leq x),\ E(T_r) = \mu > 0 \qquad \ldots 3.9.1$$

$T_1$ యొక్క విభాజన ప్రమేయము $F_1(x) = P(T_1 \leq x)$ అని అనుకొందాము.

$$W_n = \sum_{r=1}^{n} T_r \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

అయితే $W_n$ సంఘటన n సార్లు తిరిగి సంభవించడానికి పట్టే కాలాన్ని తెలుపుతుంది. ప్రత్యేకంగా.

$W_0 = T_0 = 0,\ W_1 = T_1$ = 1 వ సంఘటన సంభవించడానికి పట్టేకాలము

$W_2 = \sum_{1}^{2} T_r$ = 2 వ ,, ,, ,,

⋮ ⋮ ⋮

$W_n$ = ⋮ = n వ ,, ,, ,,

$T_1, T_2, \ldots T_n$ లు స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులు కాబట్టి, పై ఉపకల్పనల దృష్ట్యా,

$$F_n(x) = P(W_n \leq x) = F_1(x) * \underbrace{F(x) * \ldots * F(x)}_{n-1 \text{ సార్లు}}$$

కింది లెప్లాస్ - స్టీల్జిస్ పరివర్తితాలు (Laplace - Stieljes transforms)

$$\left.\begin{aligned} \phi(\theta) &= \int_0^\infty e^{-\theta x}\, dF(x), \quad \text{వాస్తవం } \theta > 0 \\ \phi_1(\theta) &= \int_0^\infty e^{-\theta x}\, dF_1(x) \quad \text{వాస్తవం } \theta > 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots 3.9.2$$

దృష్ట్యా $W_n$ యొక్క సంభావ్యతా విభాజనాన్ని తెలుసుకోవచ్చు. (3.8 2) ప్రకారం,

$$\phi_n(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta x}\, dF_n(x) = \phi_1(\theta)\left[\phi(\theta)\right]^{n-1}$$

$$(n \geq 1) \quad \ldots 3.9.3$$

### *3.9.1 $N_t$ యొక్క విభాజనము :*

సిద్ధాంతము 3.9.2 : $N_t$ యాదృచ్ఛిక చలరాశికి సంబంధించి,

i. $p_n^{(t)} = P(N_t = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t)$ .. 3.9.4

ii. $U(t) = E(N_t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t).$ ...3.9.5

ఇక్కడ $F_n(x) = F_1(x) * F_{n-1}(x).$

*నిరూపణ :* $[N_t \geq n]$, $[W_n \leq t]$ అనే ఘటనల (events) ను పరిశీలిస్తే, రెండూ సమాన ఘటనలని గమనిస్తాము.

$\therefore \quad P(N_t \geq n) = P(W_n \leq t) = F_n(t)$ ...3.9.6

కాని $P(N_t = n) = P(N_t \geq n) - P(N_t \geq n+1)$

$\therefore \quad P(N_t = n) = p_n^{(t)} = F_n(t) - F_{n+1}(t) \quad (\because \ldots 3.9.6)$

దీనితో (3.9.4) ను నిరూపించినాము, ఇప్పుడు $N_t$ యొక్క అంకమధ్యమాన్ని కనుక్కొందాము. ప్రతి $t \geqq 0$ కు,

$$U(t) = E(N_t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, p_n^{(t)}$$

$$= p_1^{(t)} + 2\, p_2^{(t)} + 3\, p_3^{(t)} + \ldots$$

$$= \left(p_1^{(t)} + p_2^{(t)} + \ldots\right) + \left(p_2^{(t)} + p_3^{(t)} + \ldots\right) + \left(p_3^{(t)} + \ldots\right) + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} p_n^{(t)} + \sum_{n=2}^{\infty} p_n^{(t)} + \sum_{n=3}^{\infty} p_n^{(t)} + \ldots$$

$$= P(N_t \geq 1) + P(N_t \geq 2) + P(N_t \geq 3) + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(N_t \geq n)$$

(3.9.6) నుండి

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$$

దీనితో సిద్ధాంత నిరూపణ పూర్తి అయింది.

ఒక పరిమిత వ్యవధిలో అనంతమైన పునఃసంఘటనలు సంభవించడం సాధ్యమా? అంటే, $t\ (< \infty)$ సమయానికి $N_t = \infty$ అవగలదా అనే విషయం అసంభవమని రుజువు చేయడానికి $N_t =$ గరిష్ఠ $\{n : W_n \leq t\}$ అని గమనిద్దాము.

$W_n = \sum_{r=1}^{n} T_r$; $T_1, T_2, \ldots, T_n$ లు ఒకే విభాజనాన్ని అనుసరించే స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులనుకొంటే, దృఢ బృహత్సంఖ్యా న్యాయము (strong law of

large numbers) దృష్ట్యా $n \longrightarrow \infty$ అయినప్పుడు

$$\frac{W_n}{n} \longrightarrow E(T_r) = \mu > 0 \qquad r = 1, 2, \ldots$$

అంటే,
$$P\left[\underset{n\to\infty}{Lt} \frac{W_n}{n} = \mu\right] = 1$$

$\mu$ ఒక పరిమిత ధనాంకం కాబట్టి $n \longrightarrow \infty$ అయినప్పుడు $W_n \longrightarrow \infty$ అయ్యే అవకాశం ఉంది అంటే, కొన్ని పరిమిత n విలువలకు మాత్రమే $W_n \leq t$ అవుతుంది. అంటే $N_t < \infty$. ప్రతి $t > 0$ కి, $N_t < \infty$ అయినప్పటికీ,

$$P\left[\underset{n\to\infty}{Lt} N_t = N_\infty = \infty\right] = 1 \qquad \ldots 3.9.7$$

ఎందుచేతనంటే, $N_\infty$ = పునఃసంఘటనల సంఖ్య మొత్తం పరిమితం కావాలంటే, ఏదో ఒక పునఃప్రారంభకాలం అపరిమితం కావలె. అంటే

$$P\left[N_\infty = \infty\right] = P\left[T_r = \infty \text{ ఏదో ఒక } r \text{ కు సంబంధించి}\right]$$

$$= P\left[\bigcup_{r=1}^{\infty} \{T_r = \infty\}\right]$$

$$\leq \sum_{r=1}^{\infty} P\{T_r = \infty\} = 0.$$

*గమనిక* : $T_1, T_2, \ldots$ లు ఒకే ఋణఘాత విభాజనాన్ని అనుసరించే స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులయితే (ie $F_1(x) = F(x)$),

$$dF(x) = \frac{\lambda^p}{\sqrt{(p)}} e^{-\lambda x} x^{p-1} dx$$

అప్పుడు గామా విభాజనపు సంకలన ధర్మము (additive property) ప్రకారం,

$$dF_n(x) = \frac{\lambda^{np}}{\sqrt{n \cdot p}} e^{-\lambda x} x^{np-1} dx$$

$$F_n(x) = \int_0^x e^{-\lambda y} \lambda^{np} y^{np-1} \frac{dy}{\sqrt{n} \cdot p}$$

$$= 1 - e^{-\lambda x} \sum_{r=0}^{np-1} \frac{(\lambda x)^r}{r!} \quad (n \geq 1)$$

(3.9.4) ద్వారా,

$$p_n^{(t)} = F_n(t) - F_{n+1}(t)$$

$$= e^{-\lambda t} \left[ \sum_{r=0}^{(n+1)p-1} \frac{(\lambda t)^r}{r!} - \sum_{r=0}^{np-1} \frac{(\lambda t)^r}{r!} \right]$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{r=np}^{(n+1)p-1} \frac{(\lambda t)^r}{r!} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots\ldots)$$

ప్రత్యేకించి $p = 1$ అయినప్పుడు,

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$p_n^{(t)} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

అవుతుంది. ఇది మార్కోవ్ సందర్భంతో ఏకీభవిస్తుంది. అంటే $T_1, T_2, \ldots$ లు ఒకే ఋణ ఘాత విభాజనాన్ని అనుసరించే స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులయితే, పునఃప్రారంభ ప్రక్రియ పాయిజాన్ ప్రక్రియ అవుతుంది. దీనినిబట్టి, పాయిజాన్ ప్రక్రియ ఒక సామాన్య పునఃప్రారంభ ప్రక్రియ (simple renewal process) కు ప్రత్యేక సందర్భ మవుతుందని గమనించవలె.

ఉదాహరణకు, పునఃప్రారంభకాలాల విభాజనము జ్యామితీయమయి,

$$P(T_r = x) = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

అప్పుడు $W_n = \sum_{r=1}^{n} T_r$ యొక్క విభాజనం జ్యామితీయ సంకలన ధర్మం ప్రకారం ఋణద్విపద విభాజనమవుతుంది. అంటే,

$$P(W_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}, \quad k \geq n$$

$$= 0 \qquad\qquad , \quad k < n.$$

(3.9.6), (3.9.4) ల నుంచి,

$$P(N_t = n) = \sum_{k=n}^{[t]} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

$$- \sum_{k=n+1}^{[t]} \binom{k-1}{n} p^{n+1} (1-p)^{k-n-1}$$

ఇక్కడ $[t]$, t లోని పూర్ణాంక విలువను సూచిస్తుంది.

(3.9.5) లోని $U(t) = E(N_t)$ అనేది (0, t] లో సంభవించే పునఃసంఘటనల సగటుసంఖ్యను తెలుపుతుంది. దీనిని మామూలుగా ప్రక్రియ యొక్క పునఃప్రారంభ ప్రమేయము (renewal function) అనీ, దీని అవకలన గుణకము (differential coeffiecient) ను పునఃప్రారంభ సాంద్రతా ప్రమేయము (renewal density function) అనీ అంటారు.

t క్షణంవద్ద సంభవించే పునఃసంఘటన యొక్క సంభావ్యతా సాంద్రతా ప్రమేయము u (t) గా సూచిస్తే,

$$u(t) = \underset{\triangle t \to 0}{Lt} P\{(t, t + \triangle t] \text{ లో సంఘటన సంభవమవడం}\}$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \underset{\triangle t \to 0}{Lt} P\{(t, t + \triangle t] \text{ లో సంఘటన}$$

r వ సారి పునఃప్రారంభమవడం} .

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \underset{\triangle t \to 0}{Lt} \frac{f_r(t) \triangle t + O(\triangle t)}{\triangle t}$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} f_r(t) \qquad \ldots \quad 3.9.8$$

ఇక్కడ $F_r(t)$ పరమ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము (absolute continuous function) అనీ, $F_r'(t) = f_r(t)$ అనుకొందాము (3.9.5), (3.9.8) ల నుండి

$$U'(t) = \sum_{r=1}^{\infty} F_r'(t) = \sum_{r=1}^{\infty} f_r(t) = u(t)$$

పునఃప్రారంభ ప్రమేయము $U(t)$ ఆధారంగా దానికి సంబంధించిన పునఃప్రారంభ ప్రక్రియను ఏకైకంగా (uniquely) నిర్ణయించవచ్చుననీ, $U(t)$ కి పునఃప్రారంభ కాలాల విభాజనము $F(x)$ కి మధ్య అన్వేకానురూపత (One-One Correspondence) ఉందని కింది చర్చద్వారా గమనించండి.

ఉదాహరణకు, పునఃప్రారంభ ప్రక్రియ యొక్క $U(t) = 4t$ అయితే, ఇది $\lambda = 4$ ను తీవ్రతారేటుగల పాయిజాన్ ప్రక్రియ యొక్క సగటు మూల్య ప్రమేయము కాబట్టి $U(t)$, $F(x)$ ల మధ్యగల అన్వేకానురూపత దృష్ట్యానూ సిద్ధాంతము 3.3.3 దృష్ట్యా $F(x)$ విభాజనము అంకమధ్యమము $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4}$ గాగల ఋణఘాత విభాజనమవుతుంది.

$$\therefore \quad P(N_t = n) = e^{-4t} \frac{(4t)^n}{n!}, \qquad n \geq 0.$$

దీనినిబట్టి మనం నిరూపించకుండా గమనించదగిన విషయమేమంటే ప్రతి $t < \infty$ కి, $U(t) = E(X_t) < \infty$.

$u(t)$, $U(t)$ లను నిర్ణయించడం వాటి లెప్లాస్ పరివర్తితాలు (Laplace transforms) ద్వారా సులభం కాబట్టి వాటిని పరిశీలిద్దాము.

$$U^*(\theta) = \int_0^{\infty} e^{-\theta t} U(t)\, dt, \qquad \text{ప్రతి వాస్తవ } \theta > 0 \qquad \ldots 3.9.9$$

$$u^*(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta t} u(t)\, dt, \qquad \text{ప్రతి వాస్తవ } \theta > 0 \qquad \ldots 3.9.10$$

ఈ పరివర్తితాల లక్షణాల దృష్ట్యా,

$$u^*(\theta) = \theta U^*(\theta)$$

$$\int_0^\infty e^{-\theta t} F_n(t)\, dt = \frac{[\phi(\theta)]^n}{\theta}$$

ఈ ఫలితాలను (3.9.5) లో ప్రతిక్షేపిస్తే,

$$U^*(\theta) = \frac{1}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_1(\theta) [\phi(\theta)]^{n-1} \qquad \ldots 3.9.11$$

$$= \frac{\phi_1(\theta)}{\theta [1 - \phi(\theta)]}$$

$$u^*(\theta) = \frac{\phi_1(\theta)}{1 - \phi(\theta)} \qquad \ldots 3.9.12$$

(3.9.11), (3 9.12) లను సర్దివ్రాస్తే,

$$U^*(\theta) = \frac{\phi_1(\theta)}{\theta} + U^*(\theta)\, \phi(\theta) \qquad \ldots 3.9.13$$

$$u^*(\theta) = \phi_1(\theta) + u^*(\theta)\, \phi(\theta) \qquad \ldots 3.9.14$$

(3.9 13), (3.9.14) ల విలోమ ఫలితాలు

$$U(t) = F_1(t) + \int_0^t U(t-\tau)\, dF(\tau) \qquad \ldots 3.9.15$$

$$u(t) = f_1(t) + \int_0^t u(t-\tau) f(\tau)\, d\tau \qquad \ldots 3.9.16$$

ఈ విధంగా లెప్లాస్ పరివర్తితాలు (3.9.9), (3.9.10) ల నుపయోగించి, (3.9.15), (3.9.16) ల ద్వారా u (t), U (t) లను కనుక్కోవచ్చు.

*3.9.2 అవధి సిద్ధాంతాలు :* పై ప్రకరణంలో (3.9.7) దృష్ట్యా $t \longrightarrow \infty$ అయితే, $N_t \longrightarrow \infty$. కాని t పెరిగినకొద్దీ ఏరేటులో $N_t$ పెరిగేది ప్రస్తుతం పరిశీలిద్దాము. అంటే, $\underset{t \longrightarrow \infty}{Lt} \frac{N_t}{t}$ ని కనుక్కొందాము.

సిద్ధాంతము 3.9.3 : ప్రతి r = 1, 2, ... కు సంబంధించి, $E(T_r) = \mu > 0$ అయితే,

$$\underset{t \longrightarrow \infty}{Lt} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu} \qquad \ldots 3.9.17$$

*నిరూపణ :* $N_t$ వ పునఃప్రారంభ కాలము $W_{N_t}$, $N_t + 1$ వ పునఃప్రారంభ కాలము $W_{N_t + 1}$ అయితే,

$$W_{N_t} \leq t < W_{N_t + 1}$$

అని గమనించండి.

$$\therefore \quad \frac{W_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} < \frac{W_{N_t + 1}}{N_t}$$

కాని

$$\frac{W_{N_t}}{N_t} = \sum_{r=1}^{N_t} T_r / N_t$$

కాబట్టి దృఢ బృహత్సంఖ్యాన్యాయం దృష్ట్యా $N_t \longrightarrow \infty$ అయితే,

$$\frac{W_{N_t}}{N_t} \longrightarrow E(T_r) = \mu > 0$$

కాని $t \longrightarrow \infty \Rightarrow N_t \longrightarrow \infty$ కాబట్టి $t \longrightarrow \infty$ అయితే,

$$\frac{W_{N_t}}{N_t} \longrightarrow \mu.$$

ఇంకా $t \longrightarrow \infty$ అయితే

$$\frac{W_{N_t+1}}{N_t} = \left(\frac{W_{N_t+1}}{N_t+1} \cdot \frac{N_t+1}{N_t}\right) \longrightarrow \mu$$

అని గమనించవచ్చు. $t \longrightarrow \infty$ అయితే, $\frac{t}{N_t}$ ఒకే విలువ $\mu$ కి అభిసరణం చెందే రెండు సంఖ్యల మధ్య ఉంది కాబట్టి సిద్ధాంత నిరూపణపూర్తి అయింది.

ఇక్కడ $\frac{1}{\mu}$ ని పునఃప్రారంభ ప్రక్రియ యొక్క రేటు అంటాము. $\mu = \infty$ అయితే, $\frac{1}{\mu} = 0$ అని వ్యాఖ్యానిస్తాము.

సిద్ధాంతము 3.9.4 : $t \longrightarrow \infty$ అయితే, $\frac{U(t)}{t} \longrightarrow \frac{1}{\mu}$ (3.9.18)

అని నిరూపించవచ్చు దీనిని ప్రాథమిక పునఃప్రారంభ సిద్ధాంతము (elementary renewal theorem) అంటారు.

ఆచరణలో చాలా ఉపయోగకరమైన కింది అవధి ఫలితాన్ని గమనించండి.

$\{N_t, t \geq 0\}$ కి సంబంధించి $T_1, T_2, \ldots$ లు పునః ప్రారంభకాలాలు అయి, $E(T_r) = \mu$, $V(T_r) = \sigma^2 \; \forall \; r = 1, 2, \ldots$ అయితే, $N_t$ అవధిలో $N\left(\frac{t}{\mu}, \frac{t\sigma^2}{\mu^3}\right)$ అనే సామాన్య విభాజనాన్ని అనుసరించే యాదృచ్ఛిక చలరాశి అవుతుంది. అంటే,

# ౪

# వ్యాప్తి ప్రక్రియ

## (DIFFUSION PROCESS)

### 4.1 ఉపోద్ఘాతము :

మనం 2 వ అధ్యాయంతో స్థితి ఆవరణ, పరామితి సమితి విచ్ఛిన్నం గాగల ప్రక్రియలను గురించిన్నూ, 3వ అధ్యాయంలో స్థితి ఆవరణ విచ్ఛిన్నంగాను, పరామితి సమితి అవిచ్ఛిన్నంగాగల ప్రక్రియలను గురించిన్నూ సమగ్రంగా చర్చించినాము. ప్రస్తుతం స్థితి ఆవరణ, పరామితి సమితులు రెండూ అవిచ్ఛిన్నంగాగల ప్రక్రియలను పరిశీలిద్దాము ప్రక్రియల వర్గీకరణంలో అవిచ్ఛిన్నమైన స్థితి ఆవరణ, విచ్ఛిన్నమైన పరామితి సమితిగల ప్రక్రియల తరగతి ఉన్నా, ఆచరణలో మనకు చాలా అరుదుగా అటువంటి ప్రక్రియలు ఎదురవుతాయి కాబట్టి ప్రస్తుతం ఇటువంటి వానిని ముఖ్య ప్రక్రియలుగా భావించడంలేదు.

అవిచ్ఛిన్న పరామితిగాగల విచ్ఛిన్న మార్కోవ్ ప్రక్రియలను అత్యల్పాంతరము (,t i + $\triangle t$ లో సంభవించే సార్థకం కాని సంక్రమణ సంభావ్యతతో లాక్షణికం చేశాము. కాని సంభవించే ఈ సంక్రమణ యొక్క పరిమాణం గుర్తింపదగిందిగా ఉంటుంది. ఉదాహరణకు, ప్రకరణము 3.4 లో చర్చించిన శుద్ధ జనన ప్రక్రియలో n పరిమాణంగల సమూహానికి సంబంధించి $\triangle t$ వ్యవధిలో ఒకే జననం (సంక్రమము) సంభవించే సంభావ్యత, అంటే $\lambda_n \triangle t$, సార్థకం కాని స్వల్ప విలువ కావచ్చు. కాని జననమే కనక సంభవిస్తే, మూల సమూహంలో ఒక యూనిటు మేరకు మార్పు సంభవిస్తుంది. n స్వల్ప విలువ అయిన సందర్భంలో n లోని ఈ మార్పు సాపేక్షికంగా చూస్తే ఎక్కువగానే తోస్తుంది. కాని ప్రస్తుతం మనం చర్చించబోయే అవిచ్ఛిన్న ప్రక్రియలలో $\triangle t$ వ్యవధిలో మార్పు సంభవించడం తథ్యమైనా, అత్యల్ప $\triangle t$ వ్యవధిలో $X_t$ లో సంభవించే మార్పు యొక్క పరిమాణము, $X_{t+\triangle t} - X_t = \triangle x$ కూడా స్వల్పంగా ఉంటుంది. కింద 4.2 ప్రకరణంలో పేర్కొన్న నియమమాలతోబాటు ఈ లక్షణంగల ప్రక్రియలను వ్యాప్తి ప్రక్రియలు (diffusion processes) అంటారు.

జీవశాస్త్రానికి చెందిన చాల సమస్యలలో జనన, మరణాలవల్ల, అంటురోగాలవల్ల జీవాణువుల సమూహాల పరిమాణాలు మార్పు చెందుతూ ఉంటాయి. సమూహాల పరిమాణాలు చాల ఎక్కువగా ఉండి, తదనుగుణంగా జరిగిన మార్పులు సాపేక్షికంగా చూస్తే స్వల్పంగా ఉండవచ్చు. ఈ విధంగా స్థితి విలువలు పరామితి విలువలు అవిచ్ఛిన్నంగా ఉండే

సందర్భాలలో వ్యాప్తి(diffusion)రకమైన ఉజ్జాయింపు నమూనాను ఉపయోగించే అవకాశం ఏర్పడుతుంది. ఉదాహరణకు, భౌతిక శాస్త్రంలో బ్రౌనియన్ కదలిక (Brownian motion) ను పాటించే చాల అణువులను పరిశీలిస్తే, అత్యల్ప కాలము, $\triangle t$ లో అతిస్వల్ప దూరాన్ని $(\triangle x)$ యాదృచ్ఛికంగా నడవడం గమనిస్తాము. ఈ తుది ఫలితమే ప్రక్రియ యొక్క వ్యాప్తి ప్రభావమవుతుంది.

$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_r < t \; (r \geq 1)$ అయ్యేటట్లు ప్రతీ పరిమిత సమితి $\{t_1, t_2, \ldots, t_r\}$ కి సంబంధించి ఏ $\{X_t, t \geq 0\}$ యాదృచ్ఛిక ప్రక్రియ

$$P(X_t \quad X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_r}) = P(X_t \quad X_{t_r}) \qquad (4.1.1)$$

అనే మార్కోవ్ నియమాన్ని పాటిస్తుందో, అట్టి ప్రక్రియను మార్కోవ్ ప్రక్రియగా పరిగణించాము. $X_t$, అన్ని వాస్తవ విలువలు $x \; (-\infty < x < \infty)$ ను స్వీకరించే యాదృచ్ఛిక చలరాశి అనుకొందాము. (2.1.2) నుంచి,

$$F(s, x_0 \,;\, t, x) = P(X_t \leq x \quad X_s = x_0) \qquad (4.1.2)$$

ను $X_t$ యొక్క షరతు లేదా సంక్రమ విభాజన ప్రమేయము (transition distribution function) అంటాము $\{X_t, t \geq 0\}$ అనే ప్రక్రియ s సమయమందు $x_0$ స్థితిలో ఉండి, t సమయానికి $(-\infty, x$ కు చెందిన ఏదైనా ఒక స్థితి విలువను స్వీకరించే సంభావ్యత (4.1.2) తెలుపుతుంది. దీని దృష్ట్యా,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & F(s, x_0 \,;\, t, x) \geq 0 \\ \text{(ii)} & F(s, x_0 \,;\, t, -\infty) = 0, \; F(s, x_0 \,;\, t, +\infty) = 1 \end{array}\right\} \quad \ldots 4.1.3$$

అని గమనించవచ్చు. ఈ సంక్రమ విభాజన ప్రమేయం సంకేతంలో చాప్‌మెన్-కొల్మొగ్రోవ్ సమీకరణాలు (3.2.1) ను వ్రాస్తే,

$$F(s, x_0 \,;\, t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} d_y F(s, x_0 \,;\, u, y) \, F(u, y \,;\, t, x)$$

$$(s < u < t) \qquad \ldots 4.1.4$$

(4.1.2) లోని సంక్రమ విభాజన ప్రమేయానికి పాక్షిక అవకలని (partial derivative)

ఉంటుందనుకొంటే,

$$f(s, x_0 ; t, x) = \frac{\partial}{\partial x} F(s, x_0 ; t, x)$$

ను $X_t$ యొక్క సంక్రమ సాంద్రత ప్రమేయము (transition density function) అంటారు. (4.1.4) ని

$$f(s, x_0 ; t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, x_0 ; u, y)\, f(u, y ; t, x)\, dy \qquad (s < u < t) \quad \ldots 4.1.5$$

(4.1.5) నుంచి

$$f(s - \triangle s, x_0 ; t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s - \triangle s, x_0 ; s, y)\, f(s, y ; t, x)\, dy \quad \ldots 4.1.6$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s - \triangle s, x_0 ; s, y)\, dy = 1$$ కాబట్టి

$$f(s, x_0 ; t, x = f(s, x_0 ; t, x) \int_{-\infty}^{\infty} f(s - \triangle s, x_0 ; s, y)\, dy \quad \ldots 4.1.7$$

4.1.6), (4.1.7) ల నుంచి,

$$f(s - \triangle s, x_0 ; t, x) - f(s, x_0 ; t, x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(s - \triangle s, x_0 ; s, y) \quad f(s, y ; t, x)$$

$$- f(s, x_0 ; t, x) \} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(s - \triangle s, x_0 ; s, y) \left\{ (y - x_0) \frac{\partial}{\partial x_0} f(s, x_0 ; t, x) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} (y - x_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} f(s, x_0 ; t, x) + \ldots\ldots \right\} dy$$

$$\doteqdot \frac{\partial}{\partial x_0} f(s, x_0 ; t, x) \int_{-\infty}^{\infty} (y - x_0) f(s - \triangle s, x_0 ; s, y) dy$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} f(s, x_0 ; t, x) \int_{-\infty}^{\infty} (y - x_0)^2$$

$$f(s - \triangle s, x_0 ; s, y) dy \quad \ldots 4.1.8$$

## 4.2. కొల్మొగ్రోవ్ సమీకరణాలు :

స్థితులు అవిచ్ఛిన్నంగా మారుతూ అంటే, అతిస్వల్పకాల వ్యవధి, $\triangle s$ లో అత్యల్ప విలువ, $\triangle x$ మేరకు స్థితిలో మార్పు చెందే మార్కొవ్ ప్రక్రియల్ని మాత్రమే ఈ అధ్యాయంలో పరిశీలిస్తాము. కాబట్టి ప్రతి అత్యల్ప విలువ $\delta > 0$ కు సంబంధించి,

$$P(X_s - X_{s-\triangle s} > \delta \quad X_{s-\triangle s} = x_0) = O(\triangle s)$$

(ఇక్కడ $\triangle s \longrightarrow 0$ అయితే, $O(\triangle s) \longrightarrow 0$)

దీనిని సంక్రమ సంక్రమ సాంద్రతా ప్రమేయ సంకేతంలో వ్రాస్తే,

$$\text{i.} \quad \underset{\Delta s \to 0}{Lt} \frac{1}{\Delta s} \int_{|y - x_0| > \delta} f(s - \Delta s, x_0 ; s, y) \, dy = 0 \qquad \ldots 4.2.1$$

4.2.1 తోపాటు కింది రెండు అవధులు కూడా ఉంటాయని అనుకొందాము. ప్రతి $\delta > 0$ కు

$$\text{ii.} \quad \underset{\Delta s \to 0}{Lt} \frac{1}{\Delta s} \int_{|y - x_0| \leq \delta} (y - x_0) f(s - \Delta s, x_0 ; s, y) \, dy = a(x_0, s) \qquad \ldots 4.2.2$$

$$\text{iii.} \quad \underset{\Delta s \to 0}{Lt} \frac{1}{\Delta s} \int_{|y - x_0| \leq \delta} (y - x_0)^2 f(s - \Delta s, x_0 ; s, y) \, dy = b(x_0, s) \qquad \ldots 4.2.3$$

(4.2.1) దృష్ట్యా (4.2.2). (4.2.3) లు వరసగా $(s - \Delta s, s)$ అంతరంలో సంభవించే స్థితి మార్పు పరిమాణము $(y - x_0)$ యొక్క అంకమధ్యమము, విస్తృతిని తెలుపుతాయని గమనించండి. (i), (ii). (iii) లను తృప్తిపరచే మార్కోవ్ ప్రక్రియ $\{X_t, t \geq 0\}$ ను వ్యాప్తి ప్రక్రియ అనీ (i), (ii), (iii) లను వ్యాప్తి నియమాలు (diffusion conditions) అనీ అంటారు.

(4.1.8) ని ఇరువైపులా $\Delta s$ తో భాగించి, $\Delta s \to 0$ అయితే, (4.2.2), (4.2.3) ల దృష్ట్యా, అవధిలో

$$-\frac{\partial}{\partial s} f(s, x_0 ; t, x) = a(x_0, s) \frac{\partial}{\partial x_0} f(s, x_0 ; t, x)$$

$$+ \tfrac{1}{2} b(x_0, s) \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} f(s, x_0 ; t, x) \qquad \ldots 4.2.4$$

(4.2.4) ని వ్యాప్తి ప్రక్రియ యొక్క తిరోగమన కొల్మొగ్రోవ్ వ్యాప్తి సమీకరణము

(Backward kolmogorov diffusion equation) అంటారు. s లోని తిరోగమన పెంపుదల (backward increment) కు బదులుగా, t లో పురోగమన పెంపుదల (forward increment), అంటే t నుండి t + $\triangle$t పై విధంగానే పరిశీలించినట్లయితే,

$$\frac{\partial}{\partial t} f(s, x_0 ; t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \{a(x, t) f(s, x_0 ; t, x)\}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{b(x, t) f(s, x_0 ; t, x)\}. \qquad \ldots 4.2.5$$

అని చూపవచ్చు. (4.2.5) కు సంబంధించిన i వ వ్యాప్తి నియమము

(i) $P(X_{t+\triangle t} - X_t > \delta \quad X_t = x) = O(\triangle t)$

లేదా $$\operatorname*{Lt}_{\triangle t \to 0} \frac{1}{\triangle t} \int_{|y-x| > \delta} f(t, x; t + \triangle t, y)\, dy = 0 \qquad \ldots 4.2.6$$

దీని దృష్ట్యా (ii), (iii) లు

(ii) $$\operatorname*{Lt}_{\triangle t \to 0} \frac{1}{\triangle t} \int_{|y-x| \leq \delta} (y - x) f(t, x ; t + \triangle t, y)\, dy$$

$$= a(x, t) \qquad \ldots 4.2.7$$

(iii) $$\operatorname*{Lt}_{\triangle t \to 0} \frac{1}{\triangle t} \int_{|y-x| \leq \delta} (y - x)^2 f(t, x; t + \triangle t, y)\, dy$$

$$= b(x, t) > 0 \qquad \ldots 4.2.8$$

(4.2.6) — (4.2.8) ల దృష్ట్యా,

$$\operatorname*{Lt}_{\triangle t \to 0} \frac{1}{\triangle t} \int_{|y-x| > \delta} (y - x)^k f(t, x; t + \triangle t, y)\, dy$$

$$= 0, \ (k = 1, 2)$$

అవుతుంది కాబట్టి, (4.2.7), (4.2.8) లను కింది విధంగా కూడా వ్రాయవచ్చు.

$$\underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x) f(t, x; t + \Delta t, y)\, dy = a(x, t) \quad \ldots 4.2.7$$

$$\underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x)^2 f(t, x; t + \Delta t, y)\, dy = b(x, t) > 0 \quad \ldots 4.2.8$$

(4.2.5) ని వ్యాప్తి ప్రక్రియ యొక్క పురోగమన కొల్మొగ్రోవ్ వ్యాప్తి సమీకరణము (Forward kolmogorov diffusion equation) అంటారు. (4.2.4), (4.2.5) లను మార్కోవ్ ప్రక్రియ యొక్క వ్యాప్తి లేదా (Fokkar-Planck) సమీకరణాలంటారు. వీటిని 1931 లో కొల్మొగ్రోవ్ ప్రతిపాదించగా, 1936 లో ఫెల్లరు (Feller) మహాశయుడు ఈ సమీకరణాల యొక్క సాధనలకు (solutions) సాంద్రతా ప్రమేయ లక్షణాలు ఉంటాయని చూపి, వీటి అస్థిత్వ (existence), ఏకత్వ (uniqueness) లక్షణాలను నిరూపించినాడు. పైన నిరూపించిన విధానం దృష్ట్యా, (4.2.1) – (4.2.3) లను లేదా (4.2.6) – (4.2.8) లు అనే వ్యాప్తి నియమాలను తృప్తిపరచే ప్రతీ మార్కోవ్ ప్రక్రియ కూడా (4.2.4), (4.2.5) వ్యాప్తి సమీకరణాలను పాటిస్తాయని గమనిస్తాము.

(4.1.2) లోని $F(s, x_0 ; t, x)$ సంక్రమ విభాజన ప్రమేయము $(t - s)$ అనే సంక్రమ కాలభేదం పైనే ఆధారపడే ప్రమేయమయితే, $\{X_t, t \geq 0\}$ సజాతీయ మార్కోవ్ ప్రక్రియ అని తెలుసు.

ఈ సందర్భంలో (21.1.2) లో సంకేతాన్ని సూక్ష్మీకరించి వ్రాస్తే,

$$F(x_0; t, x) = P(X_t \leq x \mid X_0 = x_0)$$

దీని సంక్రమ సాంద్రతా ప్రమేయము

$$f(x_0; t, x) = \frac{\partial}{\partial x} F(x_0; t, x)$$

సంక్రమ విభాజన ప్రమేయము s, t లతోపాటు $x - x_0$ మీదకూడా ఆధారపడితే $\{X_t, t \geq 0\}$ ని

సంకలన (additive) మార్కోవ్ ప్రక్రియ అంటారు. వ్యాప్తి ప్రక్రియ సజాతీయ ప్రక్రియనే కాకుండా సంకలన ప్రక్రియ కూడా అయితే దాని సాంద్రతా ప్రమేయము

$$f(s, x_0; t, x) = g(t - s; x - x_0) \quad \ldots 4.2.9$$

గా వ్రాయవచ్చు. ఈ సందర్భంలో (4.2.2), (4.2.3) లలోని అంకమధ్యము, విస్తృతులు స్థిరాంకాలవుతాయి.

$$a(x, t) \equiv a, \quad b(x, t) \equiv b \quad \ldots 4.2.10$$

(4 2 10) లోని విలువలను (4.2.4), (4 2.5) లలో ప్రతిక్షేపిస్తే, ఆ వ్యాప్తి సమీకరణాలు క్రింది పాక్షిక అవకలన సమీకరణంతో ఏకీభవిస్తాయని దమనిస్తాము.

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial t} = - a \frac{\partial}{\partial x} g(t, x) + \tfrac{1}{2} b \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(t, x) \quad \ldots 4.2.11$$

విచ్ఛిన్న పరామితి మార్కోవ్ శృంఖల నమూనా అవధిలో వ్యాప్తి ప్రక్రియ నమూనాతో ఏకీభవిస్తుందని కింద గ్రహిస్తాము.

## 4.3 యాదృచ్ఛిక నడకకు వ్యాప్తి అవధి :

2 5.2వ ప్రకరణంలో పరిశీలించిన యాదృచ్ఛిక నడకకు సంబంధించిన సంక్రమ సంభావ్యతలు

$$p_{ij}^{(n)} = h(j - i, n) \qquad i, j = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots \quad \ldots 4.3.1$$

ఇక్కడ $h(x, n) = \binom{n}{\frac{n+x}{2}} p^{\frac{n+x}{2}} q^{\frac{n-x}{2}}$

n మెట్లలో (steps) ఒక అణువు యాదృచ్ఛిక నడకలో కదలే దూరము $x = j - i$ అవుతుంది. (4.3.1) నుంచి x యొక్క అంకమధ్యమము, విస్తృతి కనుక్కొంటే,

$$E(x) = n(p - q), \quad V(x) = npq$$

ఇక్కడ ఇటువంటి యాదృచ్ఛిక నడకకు అవధి నమూనాను పరిశీలిద్దాము. అణువు ఒక మెట్టులో $\triangle x$ దూరం కదలుతుందనీ, దాని కదలికలో రెండు వరస స్థావరాల (position,

మధ్య పట్టే వ్యవధి $\Delta t$ అనీ అనుకొందాము. అప్పుడు అంతరం $(0, t)$ లో అణువు $\frac{t}{\Delta t}$ మెట్లలో $\frac{x}{\Delta x}$ యీనిట్ల దూరం మేరకు కదలుతుందని భావించవచ్చు. $(0, t)$ లో మొత్తం కదలిక ఉజ్జాయింపుగా $\frac{t}{\Delta t}$ స్వతంత్ర సమ యాదృచ్ఛిక చలరాశుల మొత్తానికి సమానము. ఈ చలరాశులు $\Delta x, -\Delta x$ విలువలను వరసగా p, q సంభావ్యతలతో తీసికొనే యాదృచ్ఛిక చలరాశులు కాబట్టి వీటి సమ విభాజనపు అంకమధ్యమము $(p-q)\Delta x$ విస్తృతి $4pq(\Delta x)^2$. అందువల్ల $(0, t)$ లో అణువు అసలు కదలిక (net displacement) యొక్క

$$\text{అంకమధ్యమము} = \frac{t}{\Delta t}(p-q)\Delta x = t(p-q)\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\text{విస్తృతి} = \frac{t}{\Delta t}4pq(\Delta x)^2 = 4tpq\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$$

అవుతాయి. $\Delta x \longrightarrow 0$, $\Delta t \longrightarrow 0$ అయినప్పుడు అవధిలో విస్తృతి విలువ పరిమితం కావలెనంటే అవధిలో $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$ పరిమితంగా ఉండవలె. అంకమధ్యమం కూడా పరిమితంగా ఉండవలెనంటే, $p - q = \Delta x$ కావలె. వీటికి అనుకూలంగా,

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = 2D,\ p = \tfrac{1}{2} + \frac{c}{2D}\Delta x,\ q = \tfrac{1}{2} - \frac{c}{2D}\Delta x \quad \ldots 4.3.2$$

అని అనుకోవచ్చు. ఇక్కడ c, D లు తదనుకూలంగా ఎన్నుకొన్న స్థిరాంకాలు. (4.3.2) దృష్ట్యా $(0, t)$ లో అణువు అసలు కదలిక యొక్క

$$\text{అంకమధ్యమము} = \mu(t) = 2ct,\ \text{విస్తృతి} = \sigma^2(t) = 2Dt.$$

$(0, t)$ లో n మెట్లు కదలిందనుకొంటే, $t \simeq n\Delta t$ కాబట్టి $\Delta t \longrightarrow 0$ అయితే, $n \longrightarrow \infty$. ఈ సందర్భంలో (4.3.1) లోని ద్విపద విభాజనము $h(x, n)$ అవధిలో సామాన్య విభాజనము $f(x, t)\,dx$ ను సమీపిస్తుంది. ఇక్కడ

$$f(x, t) = \frac{1}{\sigma(t)\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2(t)}(x-\mu(t))^2\right] \quad \ldots 4.3.3$$

ద్విపద సంభావ్యతల మధ్యగల ఆ వృత్తి సంబంధంనుంచి,

$$h(j, n+1) = p\,h(j-1, n) + q\,h(j+1, n)$$

దీనిని ప్రస్తుత సంకేతాలలో వ్రాస్తే,

$$h(x, t+\triangle t) = p\,h(x-\triangle x, t) + q\,h(x+\triangle x, t) \quad \ldots 4.3.4$$

$\triangle x \longrightarrow 0$, $\triangle t \longrightarrow 0$ అయితే, $h(x, t) \longrightarrow f(x, t)$. టేలరుసిద్ధాంతము (Taylor Theorem) ఆధారంగా $f(\cdot\,,\,\cdot)$ ను విపులీకరించి $(\triangle t)^2$, $(\triangle x)^3$, ఇంకా పై ఘాతాలు గల పదాలను ఉపేక్షించి (4.3.4) అని వ్రాస్తే, (4.3.2) దృష్ట్యా అవధిలో,

$$f(x, t) + \triangle t\,\frac{\partial f}{\partial t} + O(\triangle t)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{c}{2D}\triangle x\right)\left[f(x, t) - \triangle x\,\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}(\triangle x)^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{2D}\triangle x\right)\left[f(x, t) + \triangle x\,\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}(\triangle x)^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]$$

$$+ O(\triangle x)^2$$

అంటే,
$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{c}{D}\,\frac{(\triangle x)^2}{\triangle t}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\,\frac{(\triangle x)^2}{\triangle t}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

లేదా
$$\frac{\partial f}{\partial t} = -2c\,\frac{\partial f}{\partial x} + D\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \ldots 4.3.5$$

వైశ్లేషిక పద్ధతి ద్వారా చూస్తే కూడా (4.3.3) లోని సామాన్య విభాజనము (4.3.5) యొక్క సాధనమవుతుందని గమనించవచ్చు.

## 4.4 వీనర్ ప్రక్రియ (Wenier Proeses) :

$\{X_t, t \geq 0\}$ అనే ప్రక్రియ అవిచ్ఛిన్న సంకలన మార్కోవ్ ప్రక్రియ అనీ; ప్రతి s, t $(0 \leq s < t)$ లకు $X_t$ యొక్క సంక్రమ విభాజన ప్రమేయము

$$F(s, x_0 ; t, y) = F(s, t; y - x_0)$$ అనుకొంటే,

$$F(s, t; z) = P(X_t - X_s \leq z), \ z = y - x_0$$

ఇంకా దీని సంక్రమ సాంద్రతా ప్రమేయము $f(s, t; z)$ ఉంటుందనీ, s, t ల దృష్ట్యా $F(s, t; z)$ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయమనుకొందాము.

$X_t$ యొక్క సాంద్రతా ప్రమేయము $f(s, t; z)$ (4.2.6), (4.2.7), (4.2.8) లను తృప్తిపరస్తే, ఆ వ్యాప్తి నియమాలు

$$\underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{1}{\Delta t} \int_{|z| > \delta} f(t, t + \Delta t; z)\, dz = 0 \qquad \ldots 4.4.1$$

$$\underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{1}{\Delta t} \int_{|z| \leq \delta} z f(t, t + \Delta t; z)\, dz = a(t) \qquad \ldots 4.4.2$$

$$\underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{1}{\Delta t} \int_{|z| \leq \delta} z^2 f(t, t + \Delta t; z)\, dz = b(t) > 0 \qquad \ldots 4.4.3$$

అవుతాయి. ఇంకా, ప్రతి s, t, z లకు

(1) $\frac{\partial f}{\partial z}(s, t; z), \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(s, t; z)$ ఉంటూ, అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాలు ఆయి,

(2) ప్రతి s, t స్థిరాంకాలకు, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ అవకలని z దృష్ట్యా ఏకరూప అవిచ్ఛిన్న (uniformly continuous), ఏకరూప పరిబద్ధ (uniformly bounded) ప్రమేయము అయితే,

$\{X_t\}$ యొక్క సంక్రమ సాంద్రతా ప్రమేయము, $f(s, t; z)$ కింది పాక్షిక అవకలన సమీకరణాన్ని తృప్తిపరస్తుందని (4.2.5) ని నిరూపించిన విధంగా రుజువు చేయవచ్చు :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -a(t)\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{2}b(t)\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad \ldots 4.4.5$$

ఇప్పుడు కొన్ని పాక్షిక అవకలన సమీకరణాలను సాధించి, వాటి సాధనలకు సంబంధించిన సాంద్రతా ప్రమేయాలను కనుక్కొందాము

$f = f(x_0; t, x)$ సజాతీయ మార్కోవ్ ప్రక్రియ యొక్క సంకమ సాంద్రతా ప్రమేయమై, $x \longrightarrow \infty \mp$ తో $x f(x_0; t, x) \longrightarrow 0$, $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0; t, x) \longrightarrow 0$ అయ్యే సీమానియమాలుగల కింది పాక్షిక అవకలన సమీకరణాన్ని పరిశీలించండి.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \beta \frac{\partial}{\partial x}(xf) + D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \ldots 4.4.6$$

దీని సాధనము, f యొక్క లాక్షణిక ప్రమేయము $\phi(x_0; t, \theta)$ అయితే,

$$\phi(x_0; t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} f(x_0; t, x)\, dx \qquad \ldots 4.4.7$$

$$\therefore \phi(x_0; D, \theta) = e^{i\theta x_0}$$

ఇప్పుడు $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x}\frac{\partial}{\partial x}(xf)\,dx = \left[e^{i\theta x} xf\right]_{-\infty}^{\infty} - i\theta\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} x.f.dx$

$$= -\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} f\, dx$$

$$= -\theta\frac{\partial \phi}{\partial\theta}. \qquad \ldots 4.4.8$$

ఇదే విధంగా,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x}\,\frac{\partial f}{\partial x}\,dx = \Big[e^{i\theta x}\Big]_{-\infty}^{\infty} - i\theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x}\, f\, dx$$

$$= -\,i\,\theta\,\varphi\,(x_0;\, t,\, \theta).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx$$

$$= \Big[e^{i\theta x}\,\frac{\partial f}{\partial x}\Big]_{-\infty}^{\infty} - i\theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x}\,\frac{\partial f}{\partial x}\,dx$$

$$= -\,i\theta\,(-\,i\theta\phi) = \theta^2\,\phi\,(x_0;\, t,\, \theta). \qquad \ldots 4.4.9$$

(4.4.6) ని ఇరువైపుల $e^{i\theta x}$ తో గుణించి, $(-\infty, \infty)$ లో సమాకలనం చేసి, (4.4.8), (4 4.9) లను ఉపయోగిస్తే,

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \beta\theta\,\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\,D\,\theta^2\,\phi \qquad \ldots 4.4\ 10$$

ఈ పాక్షిక అవకలన సమీకరణాన్ని సాధించడానికి కింది సమీకరణాలను పరిశీలించండి.

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\theta}{\beta\theta} = -\,\frac{d\phi}{D\theta^2\phi} \qquad \ldots 4.4.11$$

వీటిసాధనలు

$$\theta\, e^{-\beta t} = C_1, \quad \phi \exp\left(\frac{D\theta^2}{2\beta}\right) = C_2$$

ఇక్కడ $C_1$, $C_2$, లు స్థిరాంకాలు. వీటినుంచి ఒక స్థిరాంకాన్ని తొలగిస్తే,

$$\phi \exp\left(\frac{D\theta^2}{2\beta}\right) = \psi\,(\theta\, e^{-\beta t}) \qquad \ldots 4.4.12$$

ఇక్కడ $\psi(\cdot)$ ప్రమేయాన్ని (4.4.7) నుంచి నిర్ణయిస్తే,

$$e^{i\theta x_0} = \phi(x_0; 0, \theta) = \exp\left(-\frac{D\theta^2}{2\beta}\right)\psi(\theta)$$

లేదా

$$\psi(\theta) = \exp\left(i\,\theta\, x_0 + \frac{D\theta^2}{2\beta}\right) \qquad \ldots 4.4.13$$

(4.4.12), 4.4.13) ల నుంచి

$$\phi(x_0; t, \theta) = \exp\left(i\,\theta\,\mu(t) - \tfrac{1}{2}\theta^2\sigma^2(t)\right)$$

ఇక్కడ $$\mu(t) = x_0 \exp(-\beta t)$$

$$\sigma^2(t) = \frac{D}{\beta}\left\{1 - \exp(-2\beta t)\right\}$$

లాక్షణిక ప్రమేయపు ఏకీకత్వ ధర్మం దృష్ట్యా, వ్యాప్తి సమీకరణము (4.4.6) ను తృప్తి పరచే సంక్రమ సాంద్రతా ప్రమేయము

$$f(x_0; t, x) = \frac{1}{\sigma(t)\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(t)}(x-\mu(t))^2\right\} \qquad \ldots 4.4.14$$

ఇది అంకమధ్యమము $\mu(t)$, విస్తృతి $\sigma^2(t)$ గాగల గ్యాసియన్ లేదా సామాన్య విభాజనపు సాంద్రతా ప్రమేయము అవుతుంది.

(4.4.14) ని బట్టి, $X_0 = x_0$ అని తెలిస్తే, $X_t - X_0$ అనే పెరుగుదల యొక్క సాంద్రతా ప్రమేయము పై అంకమధ్యమము, విస్తృతులతో సామాన్య విభాజన మవుతుందన్న మాట. దీనినుంచి ఇప్పుడు ఒక ప్రత్యేక సందర్భాన్ని విశదీకరిద్దాము. పై సాంద్రతా ప్రమేయంగల ప్రక్రియ స్వతంత్ర సజాతీయ పెరుగుదలలుగల ప్రక్రియ అయి, ప్రతీ t కి $E(X_t - X_0) = 0$; $P(X_0 = 0) = 1$ అయితే;

$$\mu(t) = 0\,;\ \sigma^2(t) = t\,\sigma^2.$$

కాబట్టి, (0, t) లో $X_t$ యొక్క సాంద్రతా ప్రమేయము

$$f(t, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t\sigma^2}\right) \qquad (4.4.15)$$

నిర్వచనము 4.4.1 : $P(X_0 = 0) = 1$ ని తృప్తిపరస్తూ, స్వతంత్ర, సజాతీయ పెరుగుదలలు గల ప్రక్రియ $\{X_t, t \geq 0\}$ కు సంబంధించి, (0, t) లో $X_t$ యొక్క సాంద్రతా విభాజనము (4.4.15) అయితే, అట్టి $\{X_t, t \geq 0\}$ ప్రక్రియను వీనర్ ప్రక్రియ (wiener process) లేదా బ్రౌనియన్ చలన ప్రక్రియ (Brownian motion process) అంటారు.

$\{X_t, t \geq 0\}$ ప్రక్రియ వీనర్ ప్రక్రియ అయితే, ప్రతి s, t ($0 \leq s < t < \infty$) లకు,

$$E(X_t - X_s) = 0, \quad V(X_t - X_s) = (t - s)\,\sigma^2.$$

ప్రతి $n = 2, 3, \ldots$ ; ప్రతి $t_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) ($t_1 < t_2 < \ldots < t_n$) లకు,

$$X_{t_n} = X_{t_1} + (X_{t_2} - X_{t_1}) + \ldots + (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$$

ఇక్కడ $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ లు సామాన్య విభాజనాలను అనుసరించే స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులు ఈ విధంగా $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ లు స్వతంత్రమైన సామాన్య యాదృచ్ఛిక చలరాశులలో ఏకఘాతీయ ప్రమేయలవుతాయి కాబట్టి, వీటి సంయుక్త విభాజనము కింది విలువలుగల బహు పరిమాణాత్మక (multi-dimentional) సామాన్య విభాజనమవుతుంది.

$$E(X_{t_i}) = 0, \; V(X_{t_i}) = t_i\,\sigma^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\text{Cov}.(X_{t_i}, X_{t_j}) = t_i\,\sigma^2 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n\,;\; i < j)$$

కాబట్టి యాదృచ్ఛిక సదిశ (random vector) $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ యొక్క

రెండవ ఆర్డర్ ఘాతిక మాత్రిక (2nd order moment matix M

$$M = \sigma^2 \begin{matrix} t_1 & t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \cdots & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_n \end{matrix}$$

అవుతుంది.

# BIBLIOGRAPHY


1. Bailey, N. T. J. (1964) – *The elements of Stochastic Processes with applications to the Natural Sciences*, Wiley, New York.

2. Feller, W (1968) – *An Introduction to probability theory and its applications*, Wiley, New York.

3. Karlin, S (1966) – *A first course in Stochastic Process* Academic Press, New York.

4. Narayan Bhat, U (1972) – *Elements of Applied Stochastic Processes*, Wiley, N. Y.

5. Parzen, E (1962) – *Stochastic Processes*, Holden-Day.

6. Prabhu, N. U (1965) – *Stochastic Processes*, Macmillan, N. Y.

7. Takacs, L. (1960) – *Stochastic Processes*, Methuen, London.

8. Doob, J. L. (1953) – "*Stochastic Process*", Wiley, New York.

9. Dynkin, E. B. (1965) – "*Theory of Markov Processes*", Academic Press, New York.

10. Kemeny, J. G and Snell, J. L. (1950) – "*Finite Markov Chains*", Van Nostrand, Princeton, New Jersey.

11. Chung, K. L. (1960) – *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*", Spring – Verlag, Berlin.